CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

2. CVIČENÍ / 10. BŘEZNA 2023

Úloha 2.1. *Označme* **Fld** *kategorii těles a* **Grp** *kategorii grup. Funktory* $\mathbf{Gl}_n, (-)^*\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Grp}$ *jsou definovány takto:*

- *funktor* $\mathbf{Gl}_n$ *přiřadí tělesu* T *grupu* $\mathbf{Gl}_n(T)$ *všech reguláních* $n \times n$ *matic nad* T*;*
- *funktor* $(-)^*$ *přiřadí tělesu* T *jeho multiplikativní grupu* T^**.*

Ukažte, že $\det = \{\det_T \colon \mathbf{Gl}_n(T) \to T^* \mid T \in \mathbf{ob}(\mathbf{Fld})\}$ *je přirozenou transformací* $\mathbf{Gl}_n \to (-)^*$*.*

Úloha 2.2. *Pro množinu* A *uvažme funktor* $A \times -\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$*. Ukažte, že každé zobrazení* $A \to B$ *určuje přirozenou transformaci* $A \times - \to B \times -$*.*

Úloha 2.3. *Buď* $\mathbf{A}$ *kategorie a* $\mathbf{P}$ *uspořádaná množina (na kterou budeme nahlížet jako na kategorii). Uvažme dvojici funktorů* $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{P}$*.*

(1) *Popište, kdy existuje přirozená transformace* $F \to G$*.*
(2) *Ukažte, že existuje nejvýše jedna přirozená transformace* $F \to G$*.*

Úloha 2.4. *Pro těleso* T *uvažme ketegorii* $\mathbf{Mat}_T$ *jejíž*

- *objekty jsou přirozená čísla,*
- *morfismy* $n \to m$ *jsou* $m \times n$ *matice nad* T *(skládání odpovídá maticovému násobení).*

Ukažte, že kategorie $\mathbf{Mat}_T$ *je ekvivalentní kategorii* $\mathbf{vec}_T$ *všech konečně dimenzionálních vektorových prostorů nad* T *(jejíž morfismy jsou lineární zobrazení).*

Úloha 2.5. *Pro množiny* A*,* B *označme* B^A *množinu všech zobrazení* $f\colon A \to B$*. Uvažme funktor* $(-)^A\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$*. Pro množinu* X *definujme zobrazení* $\varepsilon_X\colon X^A \times A \to X$ *předpisem* $\varepsilon_X(f, a) = f(a)$*. Ukažte, že* $\varepsilon = \{\varepsilon_X \mid X \in \mathbf{ob}(\mathbf{Set})\}$ *je přirozená transformace z funktoru* $(-)^A \times A$ *do identického funktoru na* $\mathbf{Set}$*.*

Úloha 2.6. *Označme* $\mathbf{Vec}_T$ *kategorii vektorových prostorů (a* T*-lineárních zobrazení) nad tělesem* T *a* $(-)^*\colon \mathbf{Vec}_T \to \mathbf{Vec}_T$ *kontravariantní funktor, který přiřadí vektorovému prostoru* V *vektorový prosotor* $V^* = \hom_T(V, T)$ *všech lineárních forem* $f\colon V \to T$*. Pro vektorový prostor* V *uvažme zobrazení* $\varepsilon_V\colon V \to (V^*)^*$ *dané předpisem* $\varepsilon(v)(f) = f(v)$ *pro každé* $v \in V$ *a každé* $f \in V^*$*.*

(1) *Ukažte, že* $\varepsilon = \langle \varepsilon_V \mid V \in \mathbf{ob}(\mathbf{Vec}_T)\rangle$ *je přirozená transformace z identického funktoru na* $\mathbf{Vec}_T$ *do funktoru* $((-)^*)^*$*.*
(2) *Rozhodněte, zda je* ε *přirozená ekvivalence.*
(3) *Označme* $\mathbf{vec}_T$ *podkategorii kategorie* $\mathbf{Vec}_T$ *konečně dimenzionálních prostorů. Rozhodněte, zda je restrikce* $\varepsilon \restriction \mathbf{vec}_T$ *přirozená ekvivalence.*

Úloha 2.7. *Nechť* G, H *jsou grupy. Nahlížejme na každou z nich jako na kategorii s jedním objektem.*

(1) *Rozmyslete si, že funktory* $G \to H$ *odpovídají grupovým homomorfismům.*
(2) *Ukažte, že pro dvojici funktorů* $S, T\colon G \to H$ *existuje přirozená transformace* $S \to T$ *právě když existuje* $h \in H$ *takové, že* $S(g) = hT(g)h^{-1}$ *pro každé* $g \in G$*. Popište odpovídající přirozenou transformaci a rozhodněte, zda je to přirozená ekvivalence.*

Úloha 2.8. *Buď* G *grupa a* T *těleso. Na* G *budeme opět nahlížet jako na kategorii s jedním objektem. Ukažte, že lze ztotožnit kategorii* $\mathbf{Vec}_T^G$ *funktorů z* $G \to \mathbf{Vec}_T$ *s kategorií* T*-reprezentací grupy* G*.*