

CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

1. CVIČENÍ / 24. ÚNORA 2023

Úloha 1.1. Ukažte, že složením dvou monomorfismů (resp. epimorfismů, sekcí, retrakcí, izomorfismů) dostaneme opět monomorfismus (resp. epimorfismus, sekci, retrakci, izomorfismus).

Úloha 1.2. Uvažme kategorii **Rel** jejíž objekty jsou množiny a morfismy relace (se standardním skládáním relací).

1. Ukažte, že $\rho \in \mathbf{Rel}(A, B)$ je monomorfismus právě když existuje $B' \subseteq B$ tak, že $\rho \cap (A \times B')$ určuje bijekci $A \rightarrow B'$.
2. Rozhodněte, kdy je $\rho \in \mathbf{Rel}(A, B)$ epimorfismus, resp. isomorfismus.
3. Ukažte, že v kategorii **Rel** jsou monomorfismy sekce a epimorfismy retrakce.

Úloha 1.3. Buď (P, \leq) částečně uspořádaná množina. Uvažme kategorii **P** jejíž objekty jsou prvky množiny P a morfismy odpovídají uspořádaným dvojicím prvků P . To znamená, že mezi dvojicí objektů $p, q \in \mathbf{P}$ existuje morfismus právě když $p \leq q$ a tento morfismus je právě jeden.

1. Ukažte, že **P** je kategorie.
2. Ukažte, že každý morfismus v **P** je bimorfismus.
3. Ukažte, že pro morfismus $f \in \mathbf{P}$ je ekvivalentní
 - (i) f je sekce;
 - (ii) g je retrakce;
 - (iii) f je isomorfismus;
 - (iv) f je identita (na některém z objektů);
4. Buď (Q, \leq) (jiná) uspořádaná množina a **Q** odpovídající kategorie. Rozmyslete si, že funktoři $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ odpovídají monotónním zobrazením $P \rightarrow Q$.

Úloha 1.4. Označme **Pos** kategorii všech uspořádaných množin. Morfismy v této kategorii jsou monotónní zobrazení. Rozhodněte, zda jsou všechny monomorfismy v této kategorii sekce a zda jsou všechny bimorfismy izomorfismy.

Úloha 1.5. Označme **Grp** kategorii grup (tj. objekty v této kategorii jsou grupy a morfismy grupové homomorfismy).

1. Ukažte, že monomorfismy v **Grp** jsou právě prosté homomorfismy.
2. Ukažte, že epimorfismy v **Grp** jsou právě homomorfismy na.
3. Popište sekce a retrakce v této kategorii.
4. Rozhodněte, zda jsou všechny bimorfismy v této kategorii izomorfismy.

Úloha 1.6. Nalezněte monoid (kategorii o jednom objektu), který obsahuje bimorfismus, jenž není izomorfismus. Může být tento monoid konečný?

Úloha 1.7. Ukažte, že úplný věrný funktor zobrazí ne sekci pouze sekci. Ukažte na příkladech, že žádný z předpokladů úplnosti a věrnosti nelze vynechat.

Úloha 1.8. Ukažte na příkladu, že obraz funktoru nemusí být podkategorie.