

PROSEMINÁŘ Z KOMUTATIVNÍCH OKRUHŮ
ŘEŠENÍ ÚLOH 4

Úloha 4.1. Buď B podgrupa konečné Abelovy grupy A . Ukažte, že existuje podgrupa C grupy A taková, že $A/B \simeq C$.

Řešení 4.1. Kanonická projekce $\pi_{A/B}$ (tj. zobrazení $a \mapsto a + B$) zobrazí každou p -primární komponentu grupy A na p -primární komponentu faktor-grupy A/B . Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A je p -grupa pro nějaké prvočíslo p .

Připomeňme, že typem p -grupy A rozumíme posloupnost $\text{typ } A := \langle r_1, r_2, \langle, \rangle r_k \rangle$ splňující $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k$ takovou, že

$$(4.1) \quad A \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{p^{r_i}}.$$

Na prosemináři jsme ukázali, že tato posloupnost je grupou A určena jednoznačně. Na množině všech typů zavedem uspořádání takto:

$$\langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle \leq \langle s_1, s_2, \dots, s_l \rangle$$

pokud $k \leq l$ a $r_i \leq s_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Snadno nahlédneme, že pro každý typ $\langle q_1, q_2, \dots, q_j \rangle \leq \text{typ } A$ existuje podgrupa C grupy $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{p^{r_i}}$ taková, že $\text{typ } C = \langle q_1, q_2, \dots, q_j \rangle$. Stačí totiž vzít

$$C := \bigoplus_{i=1}^j \frac{r_i}{s_i} \mathbb{Z}_{p^{r_i}}.$$

Zbývá ukázat, že $\text{typ } D \leq \text{typ } A$, pro každou faktorgupu D grupy A . Důkaz povedeme indukcí podle typu grupy A . Buď $\varphi: A \rightarrow D$ projekce a necht' $\text{typ } D = \langle q_1, q_2, \dots, q_j \rangle$. Platí, že $\varphi(pA) = p\varphi(A) = pD$. Proto můžeme předpisem $a + pA \mapsto \varphi(a) = pD$ definovat epimorfismus $\mathbb{Z}_p$ -vektorových prostorů $A/pA \rightarrow D/pD$. Všimněme si, že $k = \dim(A/pA)$ a $j = \dim(D/pD)$. Odtud plyne, že $j \leq k$. Je $\text{typ } pA = \langle r_1 - 1, r_2 - 1, \dots, r_{k'} - 1 \rangle$, kde k' je největší takové, že $r_{k'} > 1$. Podobně, je $\text{typ } pD = \langle q_1 - 1, q_2 - 1, \dots, q_{j'} - 1 \rangle$, kde j' je největší takové, že $q_{j'} > 1$. Restrikce $\varphi|_{pA}: pA \rightarrow pD$ je projekcí a z indukčního předpokladu odvodíme, že $\text{typ } pD \leq \text{typ } pA$ a tedy $j' \leq k'$ a $q_i - 1 \leq r_i - 1$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, j'\}$. Odtud a z již dokázaného $j \leq k$ dostaneme, že $\text{typ } D \leq \text{typ } A$.

Úloha 4.2. Ukažte, že každá konečně generovaná podgrupa Abelovy grupy $\mathbb{Q}$ racionálních čísel je cyklická.

Řešení 4.2. Protože podgrupa cyklické grupy je cyklická, stačí ukázat, že každá konečná množina racionálních čísel je obsažena v cyklické podgrupě $\mathbb{Q}$. Platí ale, že

$$\left\{ \frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \dots, \frac{s_n}{t_n} \right\} \subseteq \left\langle \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_n} \right\rangle.$$