PROSEMINÁŘ Z KOMUTATIVNÍCH OKRUHŮ
ÚLOHA 3

Úloha 3.1. *Buď $\boldsymbol{A}$ konečně generovaná volná Abelova grupa a $\boldsymbol{B}$ její podgrupa. Ukažte, že faktorová grupa $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ je torzní právě když* $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Řešení 3.1. $(\Rightarrow)$ *Předpokládejme nejprve, že je faktorová grupa $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ torzní. Buď $n = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ a $\{a_1, \dots, a_n\}$ nějaká báze $\boldsymbol{A}$. Protože je faktor $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ torzní, existuje pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nenulové celé číslo α_i tak, že $\alpha_i a_i \in \boldsymbol{B}$. Položme $\beta = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ a všimněme si, že $\beta\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$. Protože je grupa $\boldsymbol{A}$ volná a tedy beztorzní, je zobrazení $\varphi_\beta \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, $a \mapsto \beta a$, vnořením. Proto je $\boldsymbol{A}$ izomorfní podgrupě grupy $\boldsymbol{B}$ a tedy* $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} \leq \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

$(\Leftarrow)$ *Předpokládejme nyní, že faktorová grupa $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ není torzní. Potom existuje nenulová volná Abelova grupa $\boldsymbol{F}$, tak že $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B} = T(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{F}$. Odtud plyne, že existuje projekce $\psi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ taková, že $\boldsymbol{B} \subseteq \ker\psi$. Protože je $\boldsymbol{F}$ volná, existuje homomorfismus $\varphi \colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{A}$ takový, že složení $\psi \circ \varphi$ je identita na $\boldsymbol{F}$. Odtud plyne, že $\boldsymbol{A} = \ker\psi \oplus \varphi(\boldsymbol{F})$ a tedy $\boldsymbol{B} \oplus \varphi(\boldsymbol{F})$ je podgrupou grupy $\boldsymbol{A}$. Protože je složení $\psi \circ \varphi$ identitou na $\boldsymbol{F}$, je $\varphi(\boldsymbol{F}) \simeq \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$ a tedy* $\operatorname{rank}\boldsymbol{B} < \operatorname{rank}(\boldsymbol{B} \oplus \varphi(\boldsymbol{F})) \leq \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.