Martina Šajtarová

Formáty zápisu úloh stochastického programování

Seminář - Stochastické programování a aproximace

2. října 2006

Obsah prezentace

- Úlohy stochastického programování
- SMPS
- OSLSE

Úlohy stochastického programování

Stochastické programování

- některé koeficienty modelu jsou náhodné proměnné se známým nebo odhadnutým rozdělením
- vychází se ze (statického) matematického programu

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s. t. } g(x) \leq 0 \\ l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

kde $f : R^n \to R$,
$g : R^n \to R^m$,
$x, l, u \in R^n$.

Nutné změny

- zavedení posloupnosti rozhodnutí a realizací náhodných veličin (stage, event epoch)
- účelová funkce je nahrazena střední hodnotou:

$$\min E(f(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \ldots, x_T, \xi_T)$$

- podmínky obsahují náhodné koeficienty
- možné formy zápisu:

$$\mathrm{P}_\xi\{g_i(x,\xi) > 0\} \leq \varepsilon$$
$$\mathrm{E}_\xi\{g_i(x,\xi) | g_i(x,\xi) > 0\} \leq h$$

Problémy s pravděpodobnostními omezeními

$$
\begin{aligned}
&\min f(x) \\
\text{s. t. } & g_1(x) \leq 0 \\
& \mathrm{P}_\xi\{g_2(x,\xi) > 0\} \leq \varepsilon \\
& l \leq x \leq u
\end{aligned}
$$

Mnohostupňové problémy s kompenzací I

$$\min f_1(x_1) + \mathrm{E}_{\xi_1}\left[\min f_2(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1)) + \right.$$
$$\mathrm{E}_{\xi_2|\xi_1}\left[\min f_3(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, x_3(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2)) + \right.$$
$$+ \cdots +$$
$$\left.\left.\mathrm{E}_{\xi_{T-1}|\xi_1,\ldots,\xi_{T-2}}\left[\min f_T(x_1, \ldots, x_T(x_1, \ldots, \xi_{T-1}))\right] \ldots\right]\right]$$

Mnohostupňové problémy s kompenzací II

s. t.

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1) &\leq 0 \\
g_2(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1)) &\leq 0 \\
&\dots \\
g_T(x_1, \xi_1, \dots, x_T(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{T-1})) &\leq 0 \\
l_1 \leq x_1 &\leq u_1 \\
l_2(\xi_1) \leq x_2(x_1, \xi_1) &\leq u_2(\xi_1) \\
&\dots \\
l_T(\xi_1, \dots, \xi_{T-1}) \leq x_T(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{T-1}) & \\
&\leq u_T(\xi_1, \dots, \xi_{T-1})
\end{aligned}
$$

Rekurzivní zápis problému I

$$\begin{aligned} &\min f_1(x_1) + \overline{\mathcal{Q}}_1(x_1) \\ \text{s. t. } &g_1(x_1) \leq 0 \\ &l_1 \leq x_1 \leq u_1, \end{aligned}$$

kde

$$\overline{\mathcal{Q}}_t(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1), \ldots, x_t(x_1, \ldots, \xi_{t-1})) =$$
$$\mathrm{E}_{\xi_t|\xi_1,\ldots,\xi_{t-1}} \mathcal{Q}_t(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1), \ldots, x_t(x_1, \ldots, \xi_{t-1}), \xi_t),$$

$t = 1, \ldots, T-1,$

$$\mathcal{Q}_T \equiv 0,$$

Rekurzivní zápis problému II

$$\mathcal{Q}_t(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1), \ldots, x_t(x_1, \ldots, \xi_{t-1}), \xi_t)$$
$$= \min f_{t+1}(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1), \ldots, x_{t+1}(x_1, \ldots, \xi_t))$$
$$+ \overline{\mathcal{Q}}_{t+1}(x_1, \xi_1, x_2(x_1, \xi_1), \ldots, x_{t+1}(x_1, \ldots, \xi_t))$$

s. t.

$$g_{t+1}(x_1, \xi_1, \ldots, x_{t+1}(x_1, \xi_1, \ldots, \xi_t)) \leq 0$$
$$l_{t+1}(\xi_1, \ldots, \xi_t) \leq x_{t+1}(x_1, \ldots, \xi_t)$$
$$\leq u_{t+1}(\xi_1, \ldots, \xi_t),$$

$t = 1, \ldots, T-1.$

Deterministický ekvivalentní problém I

- všechny náhodné proměnné mají konečné rozdělení
- účelová funkce i omezení jsou lineární funkce
- reprezentace stromem událostí

$$\min c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{N_2} p_i c_i x_i + \sum_{i=N_2+1}^{N_3} p_i c_i x_i$$

$$+ \cdots + \sum_{i=N_{T-1}+1}^{N_T} p_i c_i x_i$$

Deterministický ekvivalentní problém II

s. t.

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_1 &\leq b_1 \\
A_{21_i}x_1 + A_{22_i}x_i &\leq b_i \qquad i = 2, \ldots, N_2 \\
A_{31_i}x_1 + A_{32_i}x_{a_2(i)} + A_{33_i}x_i &\leq b_i \qquad i = N_2 + 1, \ldots, N_3 \\
&\ldots \\
l_i \leq x_i &\leq u_i \qquad i = 1, \ldots, N_T.
\end{aligned}
$$

Deterministický ekvivalentní problém III

- A_{st_i}, b_i, c_i, l_i, u_i - realizace náhodných veličin
- $a_t(i)$ - předchůdce realizace i na stupni t
- p_i - pravděpodobnost cesty vedoucí do uzlu i

$$\sum_{i=N_t+1}^{N_{t+1}} p_i = 1 \qquad t = 1, \ldots, T-1$$

Lin. mnohostupňové problémy s kompenzací

- problémy se "schodovou" strukturou

$$A_{st_i} = 0 \qquad s < t - 1$$

- problémy s úplnou kompenzací

  pro všechny realizace náhodných veličin existuje přípustné řešení

- problémy s pevnou kompenzací

  A_{tt_i} je konstantní pro každé i

- problémy s jednoduchou kompenzací

$$A_{tt_i} = [I | -I] \qquad \forall i$$

SMPS

SMPS - Úvod

- formát pro zadávání problémů stochastického programování, použitelný pro většinu řešičů
- pro formulaci stochastických lineárních a celočíselných programovacích problémů
- vychází ze známého MPS formátu pro deterministické problémy
- efektivně popisuje strukturu problémů stochastického programování
- http://myweb.dal.ca/gassmann/smps2.htm
- H. I. Gassmann, E. Schweitzer: A Comprehensive Input Format for Stochastic Linear Programs, Ann. Oper. Res., 104(2001), 89-125

Popis SMPS

- existující deterministické lineární programy se převedou na stochastické přidáním informací o dynamice a stochastické struktuře
- základem jsou 3 soubory (files) - hlavní (jádro), časový, stochastický
- každý se skládá z několika sekcí, je předem dáno jejich pořadí
- každá sekce začíná hlavičkou, následují záznamy dat
- formát hlavičky:
  - první slovní pole - sloupce 1 - 14
  - druhé slovní pole - sloupce 15 - 24
  - třetí slovní pole - sloupce 40 - 49

SMPS - Záznam dat

- názvy omezeny na 8 znaků - včetně ASCII
- číselné vstupy omezeny na 12 znaků - včetně číslic, znaménka, exponentů, desetinné tečky
- formát záznamů dat:
  - pole pro kód - sloupce 2 - 3
  - první pole pro názvy - sloupce 5 - 12
  - druhé pole pro názvy - sloupce 15 - 22
  - první numerické pole - sloupce 25 - 36
  - třetí pole pro názvy - sloupce 40 - 47
  - druhé numerické pole - sloupce 50 - 61

Hlavní soubor (Core file)

- obsahuje všechny deterministické informace problému, ve standardním MPS formátu
- jména a typy všech proměnných a omezení
- koeficienty z matice levé strany i koeficienty pravé strany
- omezení pro jednotlivé proměnné
- všechny stochastické prvky spolu s počátečními hodnotami
- představuje deterministický problém

Časový soubor (Time file)

- umožňuje rozložit hlavní soubor na uzly odpovídající jednotlivým stupňům

Stochastický soubor (Stoch file)

- umožňuje vytvořit deterministický ekvivalent stochastického problému
- vyžaduje informace o náhodných proměnných
- všechny náhodné proměnné mají konečné rozdělení $\Rightarrow$ konstrukce stromu událostí
- strom může být popsán:
  - scénář po scénáři
  - uzel po uzlu
  - implicitně pomocí marginálních rozdělení (i pro spojité náhodné proměnné)
- může se vždy použít jen jedno zadání

OSLSE

Optimization Solutions and Library Stochastic Extensions

OSLSE

- stochastický programovací produkt společnosti IBM
- byl vyvinut v průběhu 1990 - 2002
- knihovna podprogramů, které mohou být spojeny s uživatelem psanými C/C++ programy
- k modelování a řešení mnohastupňových stochastických lineárních programů s kompenzací
- zvládá kvadratické účelové funkce, celočíselné proměnné, empirické generování stromů
- k dispozici je zakompovaný rozkládací řešič

Historie

- vývoj stochastického programovacího systému byl podmíněn potřebou zákazníků
- hlavní vliv:
  - Frank Russell Company - řešení stochastických programů z praxe za využití simplexové metody
  - Allstate Insurance Corporation's Research Center - systém alokace aktiv

Frank Rusell Company

- problém řízení aktiv a závazků
- 3 velké soubory ve formátu SMPS
- 10 stupňů, 2048 proměnných $\Rightarrow$ mimo schopnost veškerých stochastických programovacích softwarů, které v té době existovaly
- vytvoření SMPS "čteče" a generátoru matic, řešení problému za pomoci pomocných programů

Allstate

- hlavní součástí řešení byl simulátor stochastických budoucích toků plynoucích z aktiv a závazků
- užitková funkce byla tvořena 26 po částech lineárními penalizačními a ziskovými funkcemi
- jeden běh programu se skládal z několika set parametrizovaných stochastických lineárních programů, každý z nich obsahoval několik set tisíc podmínek a proměnných
- zpracování simulací na empirický scénářový strom

OSLSE

- obsahuje SPMS reader/generator
- vstupy ve formátu SMPS nebo přímé (tzv. interní pole)
- zakomponovaná L-shaped dekompoziční metoda
- "svazování" scénářů do stromu
- optimalizační problémy:
  - lineární
  - konvexní/konkávní kvadratické
  - smíšené celočíselné

Interní pole

- zpracování SMPS souborů může být pomalé
- psaní SMPS souborů může být náročné
- používání interních polí umožňuje psát stochastické programy v programovacích jazycích (C/C++) nebo v modelovacích jazycích (GAMS)

Generování stromu scénářů

- nová simulace se přidá do stromu příkazem $ekks_addEventToTree()$
- posloupnost se srovnává se všemi posloupnostmi, které jsou již zařazeny do stromu
- nejdelší shodný záznam je označen za rodiče daného scénáře
- váhy nových uzlů jsou nastaveny na jedničku, váhy původních se o jedničku zvýší
- výsledkem je strom scénářů, který popisuje empirické rozdělení posloupnosti simulací
- jednotlivé scénáře se získají ze stromu příkazem $ekks_getScenarioFromTree()$

Stochastické smíšené celočíselné problémy

- OSLSE podporuje algoritmus větví a řezů
- celočíselné proměnné jsou deklarovány příkazem $ekks_setIntegersAtCore()$ nebo přímo v hlavním souboru
- příkazem $ekks_markIntegers()$ se rozšíří celočíselné proměnné na celý stochastický problém podle hlavního souboru
- příkazem $ekks_branchAandBound()$ se pak spouští algoritmus

Děkuji za pozornost.