ŘEšENÉ PŘÍKLADY K CVIČENÍ PŘEDMĚTU ÚVOD DO OPTIMALIZACE

TOMÁŠ RUSÝ

1. Formulace úloh lineárního programování

Příklad 1.1 (Výrobní plánování)**.** Podnik vyrábí 3 druhy výrobků V_1, V_2, V_3. Při výrobě se spotřebovávají suroviny S_1 a S_2 a strojový čas Z_1. Na výrobu 1 kg výrobku V_1 se spotřebují 2 kg suroviny S_1 a 6 kg suroviny S_2, doba výroby je 13 hodin. K výrobě 1 kg výrobku V_2 je třeba 3 kg suroviny S_1 a 8 kg suroviny S_2 po dobu 17 hodin. Doba výroby V_3 je 15 hodin a spotřebuje se 5 kg suroviny S_1 a 1 kg suroviny S_2. Na 1 rok máme k dispozici 200 kg S_1, 150 kg S_2 a 1800 hodin na zařízení Z_1. Při prodeji pak získá podnik 2 Kč za 1 kg V_1, 4 Kč za 1 kg V_2 a 3 Kč za 1 kg V_3. Stanovte optimální výrobní plán (tj. stanovte, kolik kg kterého výrobku se má vyrobit za rok, aby byl dosažený zisk maximální).

Řešení. Proměnné modelu x_1, x_2, x_3 vyjadřují počet kg výrobků V_1, V_2, V_3, který se bude vyrábět.

$$\max \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 200 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 &\leq 150 \\ 13x_1 + 17x_2 + 15x_3 &\leq 1800 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Doplňující otázky:
Jak se převede na minimalizační úlohu?

$$-(2x_1 + 4x_2 + 3x_3)$$

Co když je cílem maximální objem produkce

$$x_1 + x_2 + x_3$$

Množství vyrobených výrobků V_2 nesmí překročit množství V_3 o více než 10 kg.

$$x_2 \leq x_3 + 10$$

Všiměte se, že v rámci řešení je zejména obsaženo:

- zavedení proměnných použitých v problému,
- formulace účelové funkce,
- zavedení omezení na proměnné,
- definice oboru hodnot proměnných.

Příklad 1.2 (Dopravní problém)**.** Mějme 1 typ neomezeně dělitelného produktu, který chceme přepravit od m výrobců k n odběratelům. Známe požadavky odběratelů (j-tý chce b_j) a kapacity výrobců (a_i je kapacita i-tého výrobce). Chceme splnit požadavky odběratelů a přitom minimalizovat náklady na přepravu (na přepravu 1 kusu zboží od i-tého výrobce k j-tému odběrateli jsou c_{ij}).

Řešení. Nechť x_{ij} značí množství přepravené od i-tého výrobce k j-tému odběrateli. Chceme minimalizovat celkové náklady $\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$, za podmínky, že splníme požadavky všech odběratelů $(\sum_i x_{ij} \geq b_j, \forall j)$ a nepřesáhnout kapacity skladů $\left(\sum_j x_{ij} \leq a_i, \forall i\right)$. Dohromady dostáváme:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq a_i, \quad i=1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &\geq b_j, \quad j=1,\dots,n, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n.$$

Příklad 1.3 (Dopravní problém II.)**.** Z daného místa je zboží přepravováno po třech různých trasách, první z nich má délku 100 km, druhá 150 km a třetí 180 km. V průběhu roku má být na první trase přepraveno alespoň 780 tun, po druhé trase 425 tun, po třetí trase 1000 tun zboží. K přepravě lze využít tři nákladní auta o nosnostech 1,5 tun, 3,5 tun a 5 tun. Nákladní auta o nosnostech 1,5 tun a 3,5 tun mohou naložená během roku najezdit maximálně 25000 km. Nákladní auto o nosnosti 5 tun smí s nákladem během roku absolvovat nejvýše 20000 km. V tabulce jsou uvedeny náklady na jeden km daným naloženým nákladním autem po dané trase:

	vůz 1	vůz 2	vůz 3
trasa 1	4	7	9
trasa 2	11	9	6
trasa 3	2	7	4

Za každé projetí danou trasou je zároveň vybíráno mýtné ve fixní výši, tento poplatek činí 200 za projetí první trasou, 250 za projetí druhou trasou a 380 za projetí třetí trasou. Zpátky platí auta pouze mýto, ostatní náklady jsou zanedbatelné. Auta musí skončit v místě kde začínala. S jakými minimálními náklady lze naplánovat přepravu zboží po daných trasách? Formulujte jako úlohu lineárního programování s využitím matematické symboliky. Úlohu pouze sestavte, nemusíte ji řešit.

Příklad 1.4 (Přiřazovací problém)**.** V podniku pracují 3 skupiny S_1, S_2, S_3. Každá skupina může za týden zhotovit jednu ze 3 zakázek Z_1, Z_2, Z_3. Kvalita a také cena zakázky závisí na tom, která skupina ji zhotovila. Předpokládané zisky v tisících Kč udává tabulka. Cílem úlohy je přiřadit zakázky pracovním skupinám tak, aby výsledný celkový zisk byl maximální.

	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	4	3	2
S_2	6	4	3
S_3	4	4	4

Řešení. Pro $i, j \in \{1,2,3\}$ definujeme proměnné $x_{ij} \in \{0,1\}$ následujícím způsobem:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } S_i \text{ pracuje na } Z_j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\max \quad 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 6x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} &= 1, \quad i=1,2,3,\\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} &= 1, \quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,3, \quad j=1,\dots,3.$$

Rozmyslete si, že splnění zavedených omezení zaručuje, že každá skupina bude pracovat max na jednom úkolu, a že každé zadání bude řešeno.

Příklad 1.5 (Řezný problém)**.** Truhlářská firma má k dispozici laťky o délce 200 cm. Při výrobě plotu potřebuje firma přesně 120 latěk 80 cm dlouhých, 310 latěk 50 cm, a 150 latěk 30 cm. Maximální povolený odřezek je délky 10 cm. Cílem je sestavit takový plán, kdy je odpad minimální.

Řešení. Proměnná x_j bude značit počet použití j-tého způsobu rozřezání laťky, viz Tabulka 1. Nutně musí být $x_j \in \mathbb{Z}_0^+$, jedná se o tzv. celočíselný problém. Minimalizujeme součet celkovového odpadu, jak vychází pro jednolitvé řezy, za podmínky splnění požadavků na délku latěk.

	1	2	3	4	5	6
80 cm	2	1	1	-	-	-
50 cm	-	1	-	4	2	1
30 cm	1	2	4	-	3	5
odpad	10	10	0	0	10	0

TABULKA 1. Všechny způsoby, jak rozřezat 200 cm laťku s odpadem maximálně 10 cm.

$$\min \quad 10x_1 + 10x_2 + 10x_5.$$

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 120\\ x_2 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 &= 310\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 150.\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, \quad j=,\dots,6$$

Příklad 1.6 (L_1-regrese)**.** Přeformulujte úlohu minimalizace součtu absolutních hodnot odchylek

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |y_i - a - bx_i|\,.$$

jako úlohu lineárního programování

Řešení.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} e_i^+ + e_i^-$$

$$\begin{aligned}a + bx_i + e_i^+ - e_i^- &= y_i, \quad i=1,\dots,n,\\ e_i^+, e_i^- &\geq 0.\\ a, b &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Rozmyslete si interpretaci prvků e_i^+, e_i^-, popisují residua i-tého pozorování. Minimalizujeme pak jejich součet, což je absolutní hodnota daného residua. Díky tomu, že tento problém je problémem lineárního programování, lze ho velmi rychle řešit. Výpočetně se může zdát trochu složitější než standarní regrese, kde minimalizujeme součet čtverců residuí. Tam máme přímo formulku. Na druhou stranu v ní je potřeba inverze jedné matice, což je výpočetně srovnatelný problém s řešením úlohy lineárního programování.

2. Hledání extrémů funkcí na dané množině

Poznámka: Před řešením každého příkladu si rozmyslete, na jaké množině problém řešíte (kompakt/otevřená/neomezená), a podle toho si uvědomte, zda-li extrémy musí existovat, a jak přibližně funkce bude vypadat. Grafický náhled, či jiné hlubší zamyšlení, často pomáhá ke zvolení optimální stopy k dosažení řešení. Nezapomínejte zdůvodnit, že nalezené extrémy jsou opravdu globální, k tomu používejte teorii z Matematické analýzy. Na konec každého příkladu pak patří závěr.

Tvrzení 2.1. *f diferencovatelná a definovaná na $D \subset \mathbb{R}$, pak $f'(x^*) = 0$ je nutná podmínka, aby měla funkce v $x^* \in int(D)$ lokální extrém.*

Příklad 2.2. Nalezněte extrémy následujících funkcí na dané množině
a) $f(x) = x \ln x$ na $(0, 1]$,

Řešení. a) pomocí volného extrému (řešením $f'(x) = 0$) a analýzy krajních bodů ($x = 1$ a $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, látka MA1) minimum je v $1/e$, maximum v 1.

Ve více dimenzích pak

Tvrzení 2.3. *f diferencovatelná a definovaná na $D \subset \mathbb{R}^n$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) = 0$ pro $\forall j$ je nutná podmínka, aby měla funkce v $x^* \in int(D)$ lokální extrém.*

Příklad 2.4. Nalezněte globální extrémy následujících funkcí na dané množině
a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - x^2 + xy - 2x + y^2 - \frac{7}{2}y + 1$ na $[-3, 1] \times [0, 4]$,
b) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ na $[0, 2] \times [0, 2]$,

Řešení. a) První se podíváme na volný extrém:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x + 1)(y - 2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2y - \frac{7}{2}.$$

Nutná podmínka pro lokální extrém splněna v bodě $[-1, 2]$ (stacionární bod). Hessián

$$H(-1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dle pravidla o hlavních minorech se jedná o pozitivně semidefinitní kvadratickou formu, z čehož ale nemůžeme udělat žádný závěr. Alternativně můžeme funkci upravit na

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + 1)^2(y - 2) + (y - 2)^2 - 2$$

a tudíž ověřování, zda-li je v bodě $[-1, 2]$ lokální minimum je ekvivalentí s tím, že funkce $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + y^2$ má v bodě $[0, 0]$ lokální minimum. Uvažme ale parametrizaci $x = 2t, y = -t^2$, získáváme $g(2t, -t^2) = -2t^4 + t^4 = -t^4$. Tato funkce má ale v $t = 0$ lokální maximum a tudíž funkce $g(x, y)$ ani $f(x, y)$ nemají v podezřelých bodech lokální minimum. Globální extrémy nalezneme dosazením do stacionárních a krajních bodů. První vyšetříme kraje. Dosadíme za $x = -3$ a dostaneme funkci $y^2 - 2y - 2$. Tato kvadratická funkce nabývá extrému v $y = 1$. To vede na podezřelý bod $[-3, 1]$. Podobně, postupně dosazením za $x = 1, y = 0$ a $y = 4$ dostaneme další podezřelé body $[1, 1], [-1, 0], [-1, 4]$). K těmto ještě musíme přidat rohy: $[-3, 0], [-3, 4], [1, 0], [1, 4]$. Vyšetřením funkční hodnoty zjistíme, že globální maximum funkce nabývá v [-3,4] a [1,4] a to 6, zatímco globální minimum pak v [-3,1] a [1,1] a to -3.

b) Víme, že sinus je omezená funkce, stačí tedy najít body, kde nabývá 1 a -1. Ze znalosti průběhu funkce sinus můžeme určit, že maximum je nabýváno v bodech $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = \pi/2 + 2k\pi, k \in$

$\{0,1\}, x \in [0,2], y \in [0,2]\}$. Minimum pak obdobně na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 3\pi/2, x \in [0,2], y \in [0,2]\}$.

Tvrzení 2.5. *$f, g_1, \ldots, g_n$ spojitě diferencovatelné na $int(D)$, matice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ má maximální hodnost na $int(D)$. Má-li funkce f v $\boldsymbol{x}^*$ vázaný lokální extrém, pak Lagrangeova funkce*

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_n g_n(\boldsymbol{x})$$

má v $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod.

Poznámka 2.6.

$$-grad\, f(\boldsymbol{x}^*) = \sum_i \lambda_i grad\, g_i(\boldsymbol{x}^*)$$

neboli $grad\, f$ je lineární kombinací $grad\, g_i$ v bodě x^*

Příklad 2.7. Nalezněte extrémy následujících funkcí na dané množině

a) $f(x,y) = e^{xy}$ na $x+y=1$
b) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $x^2+2x+y^2=0$,
c) ověřte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na $2x - y = -1$

Řešení. a) Pomocí Lagrangeovy funkce najdeme jediný stacionární bod a to $[1/2, 1/2]$. Tam fuknce nabývá lokálního i globálního maxima. Minima nikde nenabývá, pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$ se funkční hodnota limitně blíží 0, té ale nikdy nenabyde. Úlohu je možné řešit i substitucí $y = 1 - x$.

b) Spojitá funkce na kompaktu nabývá maxima i minima. Množina je kružnice $(x+1)^2+y^2 = 1$ a tudíž kompakt. Uvažujme, že vycházíme z jejího středu nějakým směrem. Protože funkce f je lineární, velikost růstu se při pohybu v rovině jedním směrem nemění. Největší růst je pak ve směru $grad\, f = (\sqrt{3}, -1)$. Vyjdeme-li ze středu kružnice v tomto směru dorazíme k maximu v bodě $[-1,0] + [\sqrt{3}, -1]/2$ a minimu $[-1,0] - [\sqrt{3}, -1]/2$. Ekvivalentně lze použít Lagrangeovy multiplikátory.

c) Přepíšeme na úlohu hledání extrémů funkce $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ na množine $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = c$.

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{n}\sum_i x_i = c, \end{aligned}$$

vyjádříme Lagrangeovu funkci a zderivujeme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) &= (x_1 \cdots x_n)^{1/n} + \lambda\left(c - \frac{1}{n}\sum_i x_i\right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_i} : &\quad \frac{1}{n}(x_1 \cdots x_n)^{1/n-1} \cdot \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} - \frac{\lambda}{n} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial \lambda} : &\quad \frac{1}{n}\sum_i x_i = c. \end{aligned}$$

upravíme-li druhou rovnici, dostaneme

$$\frac{1}{n}(x_1 \cdots x_n)^{1/n} - \frac{\lambda}{n} x_i = 0$$

a sečteme-li pro všechna i, získáme

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} = \frac{\lambda}{n} \sum_i x_i.$$

To můžeme dosadit zpátky do rovnice výše, kde získáme nutnou podmínku

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i = c, \quad \forall i.$$

Jinými slovy, maximum tohoto problému je c.

Poznámka: úpravy platí pouze v případě kdy $x_i > 0 \forall i$, pro nulové/záporné x_i AG nerovnost platit nemusí.

d) Vyjádřete y z vazební podmínky, dosaďte do funkce a hledejte extrém funkce o jedné proměnné: $f(x) = -3x^2 - 4x - 1$. Jediný kandidát vyjde $x = -2/3$, z čehož lze dopočítat $y = -1/3$. Z tvaru analyzované funkce je zřejmé, že jde o maximum, minimum funkce nenabývá, je ze spoda neomezená.

Příklad 2.8. Nalezněte extrémy (lokální i globální), (minimum i maximum) následujících funkcí na dané množině:

a) $f(x, y) = \exp(2xy)$ na množině $M = (x, y) : x^2 + y^2 = 1$,
b) $f(x, y, z) = xyz$ na množině $M = (x, y, z) : x + y + z = 3$.

Příklad 2.9. Matematicky formulujte následující úlohy a vyřešte je:

a) Astronomové ve středověku napozorovali ve vesmíru letící kometu pohybující se v rovině dané rovnicí $x + 3y - 2z = 4$ (koeficienty jsou v miliónech km). V jaké vzdálenosti nejblíže může kometa proletět okolo země? Sestavte optimalizační úlohu a tu vyřešte. (Uvažujme zemi jako střed celého vesmíru.)
b) Do obdélníku $ABCD$ o stranách a a $2a$ vepište čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ takový, že na každé straně obdélníku leží jeden vrchol a pro který je součet čtverců velikostí jeho stran minimální.

3. Konvexita

Víme, že určuje-li Hessián ve stacionárním bodě x^*

(i) pozitivně definitní kvadratickou formu, má funkce v x^* ostré lokální minimum,
(ii) negativně definitní, má funkce v x^* ostré lokální maximum,
(iii) indefinitní, má funkce v x^* sedlový bod (jde o postačující nikoliv nutnou podmínku!).

Tvrzení 3.1 (Sylvestrovo kritérium)**.** *Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je určena symetrickou maticí $A = (a_{ij})_{i,j}$, je*

(i) pozitivně definitní, pokud všechny hlavní subdeterminanty $(D_{11}, D_{22}, \ldots)$ matice jsou kladné
(ii) pozitivně semi-definitní, pokud všechny subdeterminanty (principal minors - čtvercové podmatice na diagonále) matice jsou nezáporné
(iii) negativně definitní, pokud hlavní subdeterminanty střídají znaménka počínaje záporným ($D_{11} < 0, D_{11}D_{22} < 0, \ldots$).
(iv) indefinitní, pokud nenulové a neplatí ani (i) ani (ii)

Příklad 3.2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
c) $f(x, y) = -x^2 - y^2$

Řešení. Stacionární bod ve všech případech je $[0, 0]$, hesián pak postupně:

$$a) \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad c) \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Sylvestrova kritéria vyřešíme definitnost matice a můžeme tedy tvrdit, že v $[0, 0]$ je a) ostré lokální minimum, b) sedlový bod a c) ostré lokální maximum.

Definice 3.3. Řekneme, že množina A je konvexní, pokud s každými dvěma body obsahuje také jejich konvexní lineární kombinace, tj. $\forall x, y \in A$ a $\lambda \in (0,1)$ je také $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Příklad 3.4. $A, B \in \mathbb{R}^n$ konvexní. Rozhodněte, zda následující množiny také musí nebo nemusí být konvexní.

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) A^C
e) $clo(A)$

Řešení. Postupně, buďto důkazem nebo protipříkladem:

a) ne, např: $A = \{0\}, B = \{1\}, x = 0, y = 1, \lambda = 1/2$.
b) ano, nechť $x, y \in A \cap B, \lambda \in [0,1]$, pak $x, y \in A, x, y \in B$, ty jsou konvexní, tedy platí i že $\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \lambda x + (1-\lambda)y \in B$ a celkem tudíž $\lambda x + (1-\lambda)y \in A \cap B$
c) ne, např: $A = [0,1], B = \{1/2\}, x = 0, y = 1, \lambda = 1/2$.
d) ne, např: $A = \{0\}, x = -1, y = 1, \lambda = 1/2$.
e) ano, $x, y \in \bar{A}$, $\exists x_n, y_n$ že $x_n \to x$ a $y_n \to y$ a zároveň $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$. Z předpokladů $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{A}$.

Příklad 3.5. Pokračování předchozího

a) $\mathrm{int}(A)$
b) αA
c) Minkowského součet $A + B = \{x \in \mathbb{R}^n, x = a + b, a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B}(A + b)$
d) Minkowského rozdíl $A \ominus B = \{x \in \mathbb{R}^n, x + (-1)B \subset A\} = \bigcap_{b \in B}(A - b)$
e) $A \times B$

Řešení. Postupně důkazem:

a) ano, $x, y \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A, U_\varepsilon(y) \subset A$. Zvol $\lambda \in (0,1)$ a $z \in U_\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y)$. $x + z - (\lambda x + (1-\lambda)y) \in U_\varepsilon(x)$ a $y + z - (\lambda x + (1-\lambda)y) \in U_\varepsilon(y)$. Konvexní kombinace těchto bodů je z, a z konvexnosti A plyne $z \in A$, čímž získáváme že $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{int}(A)$.
b) ano, pro $\alpha = 0$ triviální, nechť $\alpha \neq 0$ a $x, y \in \alpha A, \lambda \in [0,1]$, pak $x/\alpha, y/\alpha \in A$ a ta je konvexní, tedy platí i že $(\lambda x/\alpha + (1-\lambda)y/\alpha) \in A$ a celkem tudíž $\lambda x/ + (1-\lambda)y \in \alpha A$.
c) domácí úkol
d) domácí úkol
e) přímo rozepsáním z definice

Příklad 3.6. Nechť A má vlastnost, že $\forall x, y \in A$ také $x/2 + y/2 \in A$.

a) je A konvexní?
b) je A konvexní, pokud víme, že A je uzavřená?
c) je A konvexní, pokud víme, že A je otevřená?

Řešení. Uvědomíme si, že je možné "sestavit"kombinace typu $\frac{k_n}{2^n}x + (1 - \frac{k_n}{2^n})y$, $k_n, n \in \mathbb{N}$.

a) ne, např. $\mathbb{Q}$ splňuje daný požadavek ale není konvexní.
b) ano, protože $\forall \lambda \in [0,1]$ existují $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$, že $\lambda_n \to \lambda$. Víme, že $\lambda_n x + (1-\lambda_n)y \in A$ a protože je A uzavřená také $\lambda_n x + (1-\lambda_n)y \to \lambda x + (1-\lambda)y \in A$.
c) ano, zvol $x, y \in A, \lambda \in [0,1]$ a $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A, U_\varepsilon(y) \subset A$. Pak existuje $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n} : |1 - \lambda/\lambda_n| < \varepsilon/(|x| + |y|)$. Definujme $x_n = x \cdot \lambda/\lambda_n + y - y\lambda/\lambda_n$. Platí:

$$|x - x_n| \leq |x(1 - \lambda/\lambda_n) - y(1 - \lambda/\lambda_n)| \leq |1 - \lambda/\lambda_n| \cdot (|x| + |y|) \leq \varepsilon.$$

Jinými slovy, $x_n \in A$, dále pak $\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)y = \lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Příklad 3.7. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní, která obsahuje přímku p. Ukažte, že pro $b \in M$ a $b \notin p$, množina M obsahuje přímku rovnoběžnou s p procházející bodem b.

Řešení. Víme, že existují $a \in M$ a $u \in \mathbb{R}^n$, že $a + tu \in M$, $t \in \mathbb{R}$, kde vektor u určuje směr přímky p. Z konvexity M plyne, $\lambda(a + tu) + (1 - \lambda)b = b - \lambda(b - a) + \lambda tu$, pro každé $\lambda \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$. To znamená, že $b - \lambda(b - a) + su \in M$ pro každé $s \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$. Limitním přechodem pro $\lambda \to 0+$ platí $b + su \in clo(M) = M$.

Definice 3.8. Řekneme, že A je konvexní polyedrická množina, je-li průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů ($\{x \in \mathbb{R}^n, a^T x \geq c\}$). Konvexní polyedr je omezená konvexní polyedrická množina.

Příklad 3.9. Rozhodněte, jakého typu jsou následující množiny

a)

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x + y &\leq 4 \end{aligned}$$

Řešení. Pomocí grafického náčrtku lze nahlédnout, že a) konvexní polyedrická, b) konvexní polyedr

Příklad 3.10. Rozhodněte o množinách

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$,
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq y \leq 1\}$,
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$,

která z nich je konvexní polyedr a která není.

Řešení. a) ano (L_1 kruh), b) ano, c) ne (není omezená)

Definice 3.11. Kužel je množina $K \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou $0 \in K$ a $\forall x \in K, \alpha \geq 0$ také $\alpha x \in K$. Konvexní kužel je konvexní množina, která splňuje definici kužele.

Příklad 3.12. Ověřte, že množina $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ je konvexní kužel. Dokonce neobsahuje žádnou přímku.

Řešení. Zvol $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K, \lambda \in [0, 1]$. Zřejmě také $0 \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$.

4. Konvexní funkce a množiny

Definice 4.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ konvexní. Řekneme, že funkce $f : D \to \mathbb{R}$ je konvexní, pokud $\forall x, y \in D$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Definice 4.2. Ekvivalentně, $D \subset \mathbb{R}^n$ konvexní. f konvexní, pokud epigraf (tj. $\{(x, \eta) : f(x) \leq \eta, x \in D, \eta \in \mathbb{R}\}$) je konvexní množina.

Příklad 4.3. a) f, g konvexní funkce, $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ je konvexní funkce

b) f_i je konvexní funkce $\Rightarrow \sup f_i$ je konvexní funkce,

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pokud g je konvexní a h je konvexní neklesající (nebo když g je konkávní a h je konvexní nerostoucí), pak $f(x) = h(g(x))$ je konvexní funkce. Speciálně tedy: $\mathrm{e}^{g(x)}$ je konvexní pro g konvexní, $1/g(x)$ je konvexní pro g konkávní kladnou, $g(x)^p$ je konvexní pro g konvexní kladnou a $p > 1$.

Řešení. c)

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq h(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in (0, 1).$$

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \cdots + |x_n|$,
b) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, $y > 0$,
c) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^4$,
d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,
e) $f(x,y) = xy \log xy$, $x > 0$, $y > 0$.

Řešení. a) ano, každá norma je konvexní, z trojúhélníkové nerovnosti

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

b) ano, hessián $H(x,y)$ je pozitivně semidefinitní matice:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2/y & -2x/y^2 \\ -2x/y^2 & 2x^2/y^3 \end{pmatrix},$$

c) ano, $g(x,y) = x^2 + y^2$ je konvexní a $h(z) = z^2$ pro $z \geq 0$ je konvexní neklesající
d) ne, matice druhých derivací není pozitivně semidefinitní (poslední prvek diagonály je záporný)
e) ne, hessián $H(x,y)$ není pozitivně semidefinitní matice na celém definičním oboru funkce.

$$\begin{pmatrix} y/x & 2 + \log xy \\ 2 + \log xy & x/y \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.5. Rozhodněte, která z následujících množin je konvexní:
a) $\{x, y \in \mathbb{R} : e^x + e^y \leq 10\}$
b) $\left\{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 5, e^x + e^y \leq 10\right\}$

Řešení. Je-li f konvexní, je konvexní také úrovňová množina $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$ pro libovolné $r \in \mathbb{R}$. V obou případech stačí ukázat, že funkce jsou konvexní (např. přes PSD hessián).
a) $e^x + e^y$ je konvexní.
b) + fakt že průnik dvou konvexních množin je konvexní.

Příklad 4.6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny a funkce konvexní a svá tvrzení dokažte. V případě, že množina konvexní není, najděte trojici bodů, která porušuje definici konvexity.
a) $\left\{x, y \in \mathbb{R} : x \leq (y-1)^2, x + 2y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0\right\}$
b) $\left\{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3y^2 - 6y \leq 10, |x| + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\}$
c) $\left\{x, y \in \mathbb{R} : (e^x + y^3)\log(e^x + y^3) \leq 15, x \leq 2\right\}$
d) $f(x,y) = \exp(x^2 + e^{-y}) + 6xy$ na $(1,\infty) \times (0,\infty)$
e) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{e^{x+ay}}{1 + e^{x+ay}}\right)$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ parametr.

5. Grafické a přímé řešení LP

Příklad 5.1. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení. Omezení převedeme do tvaru s nerovností pro jednu proměnnou a v rovině vyznačíme přímku určenou případem, kdy je omezení splněno jako rovnost. Příslušnou část poloroviny pak odpovídá nerovnosti v omezení:

(1) $x_2 \geq -2x_1 + 2$

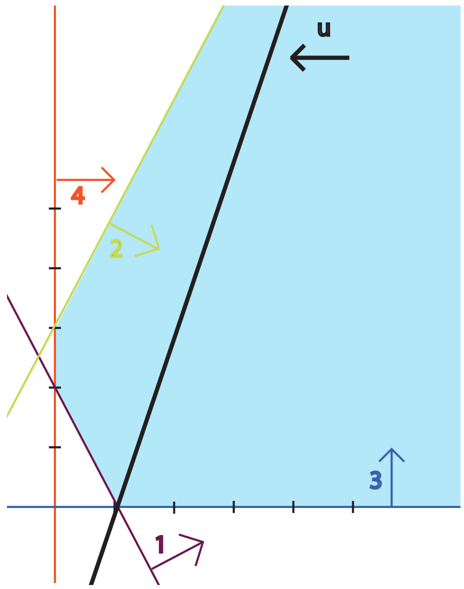
(2) $x_2 \leq 2x_1 + 3$

(3) $x_1 \geq 0$

(4) $x_2 \geq 0$

Pro účelovou funkci vytvoříme rovnosti tvaru $3x_1 - x_2 = c$ a zakreslíme přímku pro zvolenou konstantu $c = 3$, přičemž určíme v jakém směru posunu přímky konstanta klesá:

$$(u)\ x_2 = 3x_1 - 3$$



Optimální řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, účelová hodnota -3.

Příklad 5.2. Řešte předchozí příklad s maximalizací místo minimalizace.

Řešení. Maximalizace, postupuji opačným směrem. Je jasné, že když s účelovou funkcí budu hýbat doprava, stále nějaké řešení bude přípustné (např $(x_1, 0)^T x_1 \geq 0$). Úloha je neomezená.

Příklad 5.3. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{min} & 2x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Řešení. $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, účelová hodnota -10.

Příklad 5.4. Předchozí příklad s maximalizací místo minimalizace.

Řešení. $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = -2\frac{1}{3}$, účelová hodnota $\frac{2}{3}$.

Příklad 5.5. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{max} & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení. $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$, účelová hodnota $14\frac{2}{3}$. V případě minimalizace v $(0, 0)^T$.

Příklad 5.6. Řešte úlohu výše s minimalizací místo maximalizace:

Řešení. Minimum v $(0,0)^T$.

Příklad 5.7. V předchozím příkladě maximalizujte funkci $x_1 + x_2$.

Řešení. Účelová funkce je rovnoběžná s prvním omezením. Maximum se nabývá na úsečce na přímce odpovídající prvnímu omezení, mezi druhým a třetím omezením. Tj. na úsečce jejíž krajní body jsou $(2/3, 10/3)^T$ a $(2,2)^T$. Závěrem, maximum je nabýváno na $(t, 4-t)^T, t \in [2/3, 2]$. Funkční hodnota je -4.

Příklad 5.8. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{max} & 2x_1 & - & 6x_2 & & \\ \text{za podmínek} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení. Nemá žádná přípustná řešení.

Příklad 5.9. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{min} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{za podmínek} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 10 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 15 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$$

a) Uveďte optimální řešení a optimální hodnotu účelové funkce. [$x_1 = 6$, $x_2 = 8$, účelová hodnota 36]
b) Jaké bude optimální řešení a optimální hodnota účelové funkce, jestliže místo minimalizace budeme uvažovat maximalizaci?
c) Jaké bude optimální řešení a optimální hodnota účelové funkce, jestliže do původní úlohy přidáme podmínku $x_1 + x_2 \geq 0$?
d) Jaké bude optimální řešení a optimální hodnota účelové funkce, jestliže do původní úlohy přidáme podmínku $2x_1 + 3x_2 \geq -6$?
e) Jaké bude optimální řešení a optimální hodnota účelové funkce, jestliže v původní úloze změníme poslední podmínku na podmínku $x_1 + x_2 \geq 15$?

Řešení. Postupně:

a) úloha je neomezená (např pro $x_1 = x_2, x_1 \leq 4, x_1 \to -\infty$),
b) $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, účelová hodnota 36,
c) $x_1 = 4/3$, $x_2 = -4/3$, účelová hodnota $-4/3$,
d) $x_1 = -\dfrac{12}{5}t + (1-t)\dfrac{3}{4}$, $x_2 = -\dfrac{2}{5}t - (1-t)\dfrac{5}{2}, t \in [0,1]$, účelová hodnota -6,
e) úloha nemá řešení, množina přípustných řešení je prázdná.

Definice 5.10. Zápis úlohy lineárního programování ve smíšeném tvaru:

$$\begin{aligned} &\min\ (\max)\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{za podmínek }\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} \geq b_j\ \forall j \in J_{\geq} \\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} \leq b_j\ \forall j \in J_{\leq} \\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} = b_j\ \forall j \in J_{=} \\ & x_i \geq 0\ \forall i \in I_{\geq} \\ & x_i \leq 0\ \forall i \in I_{\leq} \\ & x_i = 0\ \forall i \in I_{=} \end{aligned}$$

kde $J_{\geq} \cup J_{\leq} \cup J_{=} = \{1, 2, .., m\}$ disjunktní rozklad a $I_{\geq} \cup I_{\leq} \cup I_{=} = \{1, 2, .., n\}$ disjunktní rozklad.

Definice 5.11. Zápis úlohy lineárního programování ve standardním tvaru:

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{za podmínek }\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} = b_j,\ j = 1, .., m \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, .., n \end{aligned}$$

Definice 5.12. Zápis úlohy lineárního programování ve tvaru nerovností:

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{za podmínek }\ & \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} \geq b_j,\ j = 1, .., m \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, .., n \end{aligned}$$

Příklad 5.13. Převeďte následující úlohu do standardního tvaru (případně do tvaru nerovností):

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & -3x_1 & + & 5x_2 & & & & \\ \text{za podmínek} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\ & 8x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Řešení. Běžný postup při převodech:

- $\min f(x) = -\max -f(x)$
- $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} \leq b_j$ převedeme na rovnost přidáním skluzové proměnné:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} + v_j &= b_j \\ v_j &\geq 0 \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} \geq b_j$ převedeme na rovnost přidáním skluzové proměnné $(-v_j)$ analogicky.
- $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} = b_j$ převedeme na nerovnosti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} &\geq b_j \\ \boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x} &\leq b_j \end{aligned}$$

- $x_i \leq 0$ převedeme na $x_i^- = -x_i, x_i^- \geq 0$
- $x_i \in \mathbb{R}$ převedeme na dvě nezáporné proměnné: $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$

Formulace úlohy ve standarním tvaru pak vypadá následovně:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 3x_1 & - & 5x_2 & & & & & & & & \\
\text{za podmínek} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3^+ & - & x_3^- & - & v_1 & = & 2 \\
 & 8x_1 & + & x_2 & - & 2x_3^+ & + & 2x_3^- & & & = & 1 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3^+ & - & x_3^- & + & v_2 & = & -2 \\
 & x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3^+ & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_3^- & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & v_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & v_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Tvrzení 5.14. *Každá konvexní polyedrická množina se dá rozložit jako součet konvexního polyedru, konvexního polyedrického kužele, který neobsahuje přímku, a lineárního podprostoru.*

$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R} : Ax = b, x \geq 0\}$ (množina přípustných řešení) je konvexní polyedrická množina, tedy

$$\mathcal{M} = \mathcal{P} + \mathcal{K},$$

kde $\mathcal{P}$ je konvexní polyedr, jehož krajní body jsou přípustná bazická řešení, $\mathcal{K}$ je konvexní kužel, kde

$$\mathcal{K} = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = 0, y \geq 0\}.$$

Příklad 5.15. Rozložte množinu

$$\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = -2,\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}$$

a přímou metodou řešte úlohu:

$$\min\{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4,\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}\}$$

Řešení. Pro úlohu ve standardním tvaru, tj. konvexní polyedrická množina je v nezáporném kvadrantu, hledáme krajní body a krajní směry množiny přípustných řešení na základě charakterizace:

- Krajní body jsou právě všechna přípustná řešení $\boldsymbol{x}$, pro která podmatice omezení složená jen ze sloupců, které odpovídají nenulovým složkám $x_i > 0$, má hodnost rovnu počtu sloupců.
- Krajní směry jsou právě všechny směry $\boldsymbol{s}$, pro které podmatice omezení složená jen ze sloupců, které odpovídají kladným složkám $s_i > 0$, má hodnost o jednu menší nežli je počet jejích sloupců.

Omezení tvoří matici s hodností 2:

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Při hledání krajních směrů (řešení soustavy s nulovou pravou stranou):

(1) Pro právě jednu kladnou (nenulovou) složku směru $\boldsymbol{s}$ není žádné řešení, neboť by podmatice musela mít hodnost 0, tedy A by musela obsahovat nulový sloupec.
(2) Všechny podmatice se dvěma sloupci (rozměr 2x2) jsou regulární, tedy s hodností 2, a tak směry s dvěma kladnými složkami nevyhovují požadované podmínce.
(3) Pro směry se třemi kladnými složkami máme 2 vyhovující řešení: $(2,1,3,0)^T$, $(1,2,0,3)^T$ a 2 nevyhovující řešení: $(1,0,2,-1)^T$, $(0,1,-1,2)^T$ - nesplňují nezápornost

Při hledání krajních bodů (musí být řešením soustavy rovnic s pravou stranou):

(1) Nulový bod není řešením, protože pravá strana omezení je nenulová. Pro jednu kladnou složku bodu $\boldsymbol{x}$ není žádné řešení, protože pravá strana omezení není lineární kombinací žádného sloupce matice omezení.
(2) Pro body se dvěma nenulovými složkami máme 3 vyhovující řešení: $(1,0,4,0)^T$, $(0,2,0,5)^T$, $(0,0,2,1)^T$ a 3 nevyhovující řešení: $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right)^T$, $(-1,0,0,2)^T$, $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^T$ - nesplňují nezápornost
(3) Body s 3 kladnými složkami nemůžou být řešením, matice má hodnost $2 < 3$.

Řešení optimalizační úlohy:

(1) Neexistuje-li žádný krajní bod, úloha nemá řešení.
(2) Pokud v nějakém krajním směru má účelová funkce zápornou hodnotu, úloha nemá řešení, funkce neomezeně klesá v tomto směru.
(3) Jinak je jedním z optimálních řešení některý z krajních bodů, ten s nejmenší hodnotou účelové funkce.
   - Pokud takových bodů je více, je řešením i úsečka mezi těmito body.
   - Pokud má navíc účelová funkce nulovou hodnotu pro nějaký krajní směr s^*, úloha má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru $x^* + ts^*, t \geq 0$, kde x^* je krajní bod s nejmenší hodnotou účelové funkce.

Dosazením krajních bodů do účelové funkce zjistíme, že nejnižší hodnotu funkce nabývá v bodě $(0,2,0,5)^T$. Navíc výpočtem hodnot účelové funkce v přípustných krajních směrech zjistíme, že pro směr $(1,2,0,3)^T$ nabývá funkce hodnotu 0. Optimální řešení jsou tvaru $(0,2,0,5)^T + t\,(1,2,0,3)^T$, optimální hodnota účelové funkce je -6.

Příklad 5.16. Přímou metodou vyřešte úlohu lineárního programování:

$$\begin{array}{rcccccc}
\text{min} & 4x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Řešení. Převeďte úlohu do standardního tvaru, vypočtěte krají body a krajní směry, najděte kandidáta na minimum, ověřte podmínku optimality. Správné řešení je bod $[0,4]$ s optimální hodnotou 12.

6. Simplexový algoritmus

Příklad 6.1. Řešte graficky a přímou metodou následující úlohu:

$$\begin{array}{rcccccc}
\text{min} & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{za podmínek} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Řešení. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, účelová hodnota -1.

Převodem na standardní tvar získáme následující omezení:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Krajní body (srovnej s grafickým řešením):

(1) Nulový bod není krajním, pravá strana je nenulová. Pro jednu kladnou složku není pravá strana lineární kombinací žádného sloupce matice A.
(2) Pro dvě kladné složky jsou vyhovující body: $(2,3,0,0)^T$, $(0,1,0,2)^T$ a $(0,0,1,3)^T$.
(3) Matice má hodnost dva, a tak nemůže mít krajní bod 3 a více kladných složek.

Krajní směry (srovnej s grafickým řešením):

(1) Pro jednu kladnou složku není žádný krajní směr, neboť matice A neobsahuje nulový sloupec.
(2) Pro dvě kladné složky je vyhovující směr: $(1,0,1,0)^T$.
(3) Pro více kladných složek není vyhovující žádný směr.

$$\mathcal{M} = conv\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} + pos\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Příklad 6.2. Řešte příklad (6.1) simplexovou metodou.

Řešení. Přidáním skluzových proměnný převedeme úlohu do standardního tvaru:

$$\begin{array}{rr} \min & c^T x \\ \text{za podmínek} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Tedy v našem případě:

$$\begin{array}{rrrrrrr} \min & 2x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{za podmínek} & -x_1 & +x_2 & +\boxed{x_3} & & = & 1 \\ & & x_2 & & +\boxed{x_4} & = & 3 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} & & \end{array}$$

Jako bázi vybereme proměnné x_3 a x_4 a zapíšeme do simplexové tabulky, která má pro úlohu ve standardním tvaru a bázi B následující tvar:

			c^T
			x^T
c_B	x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
		$c_B^T B^{-1}b$	$c_B^T B^{-1}A - c^T$

V našem případě je B jednotková, což zjednodušuje výrazy.

			2	-1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	$\boxed{1}$	-1	$\boxed{1}$	1	0
0	x_4	3	0	1	0	1
		0	-2	$\boxed{1}$	0	0

Vidíme, že máme přípustné řešení $B^{-1}b = (1,3) \geq 0$, ale podmínka optimality $c_B^T B^{-1}A - c^T = (-2,1,0,0) \leq 0$ není splněna, přistoupíme tedy k iteraci simplexu. Kritérium optimality je porušeno pro proměnnou x_2, proto ji zařadíme do báze. Nyní se koukáme po složkách na podíly aktuálního řešení $(1,3)$ a sloupce odpovídající proměnné, kterou zrovna přidáváme v matici omezení $(1,1)$. Podíl uvažujeme pouze v případě, že dělíme kladným číslem (ostře větším než 0). Dostáváme podíly $(1,3)$. Vybereme minimální podíl a proměnou příslušící tomuto podílu vyřadíme z báze - vyřadíme x_3. Nyní pomocí Gaussovi eliminace upravuje matici omezení (s levou stranou) do takového tvaru, aby B byla opět jednotková.

			2	-1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
-1	x_2	1	-1	1	1	0
0	x_4	2	1	0	-1	1
		-1	-1	0	-1	0

Nyní již máme přípustné řešení, které splňuje podmínky optimality. Nalezli jsme tedy optimální řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,2)$.

Příklad 6.3. Simplexovou metodou řešte úlohu LP

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{min} & 3x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 6 \\
& -2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Řešení. Opět jako v prvním případě přidáme skluzové proměnné a vytvoříme si tabulku.

			3	-1	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	6	1	3	-2	1	0
0	x_5	2	-2	0	1	0	1
		0	-3	1	-6	0	0

Vidíme, že do báze přidáme proměnou x_2. Nyní když se počítáme podíly, tak do úvahy připadá jen jeden, protože ve sloupci v matici omezení odpovídající x_2 je pouze jedno kladné číslo. Z báze tedy vyřadíme x_4.

			3	-1	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_2	2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_5	2	-2	0	1	0	1
		-2	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

Podmínky přípustnosti i optimality jsou splněny, máme tedy optimální řešení $(0, 2, 0, 0, 2)$.

7. Duální Simplexový algoritmus

Příklad 7.1. Simplexovou metodou řešte úlohu LP

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{min} & 6x_1 & - & 2x_2 & - & 8x_3 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & - & 2x_2 & & & \leq & -6 \\
& x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\
& & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 7 \\
& x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Co kdybychom maximalizovali?

Řešení. Nyní nemůžeme použít stejný přístup, přidáním skluzových proměnných se nám nevytvoří jednotková matice jako v prvních dvou případech. Můžeme nerovnosti vynásobit -1 abychom dosáhli jednotkové matice, ale potom nebudeme mít počáteční přípustné řešení, tj. $b \geq 0$. Proto použijeme dvoufázový simplex, kdy v první fázi hledáme přípustnou bázi. Začněme tím, že si zapíšeme úlohu do tabulky, přidáme skluzové proměnné a upravíme tak, aby pravá strana byla nezáporná.

Jednotková matice tedy nelze vytvořit ze sloupců matice omezení. Proto si přidáme tolik proměnných, kolik je potřeba, abychom jednotkovou matici vytvořili. Jeden sloupec je již v kanonickém tvaru, stačí tedy přidat 2 proměnné z_1 a z_2 (a vytvořit tím zbývající 2 kanonické sloupce) a řešit pomocnou úlohu, kde všechny koeficienty v účelové funkci pro proměnné x vynulujeme a u proměnných z koeficient nastavíme na 1. Tedy minimalizujeme součet z.

Nyní již standardně řešíme úlohu LP pomocí simplexu. Přidáme x_3 a vyřadíme z_2.

Přidáme x_2 a vyřadíme z_1.

			6	-2	-8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
?	?	6	-1	2	0	-1	0	0
?	?	8	1	-4	-2	0	$\boxed{1}$	0
?	?	7	0	-2	1	0	0	-1
		?	?	?	?	?	?	?

			0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2
1	z_1	6	-1	2	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	8	1	-4	-2	0	1	0	0	0
1	z_2	7	0	-2	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	1
		13	-1	0	1	-1	0	-1	0	0

			0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2
1	z_1	6	-1	2	0	-1	0	0	1	0
0	x_5	22	1	-8	0	0	1	-2	0	2
0	x_3	7	0	-2	1	0	0	-1	0	1
		6	-1	2	0	-1	0	0	0	-1

			0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2
0	x_2	3	-1/2	1	0	-1/2	0	0	1/2	0
0	x_5	46	-3	0	0	-4	1	-2	4	2
0	x_3	13	-1	0	1	-1	0	-1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Získali jsme nyní přípustné řešení pro původní problém, zbavíme se tedy pomocných proměnných z a řešíme původní úlohu.

Podmínky optimality nejsou splněny například pro x_1 a sloupec náležící x_1 nemá žádnou složku kladnou, tedy úloha je neomezená a optimální hodnota je $-\infty$.

Kdybychom maximalizovali, pak převedeme úlohu na minimalizaci, kde u účelové funkci přidáme minus. Přípustné řešení je to i pro maximalizační úlohu, mění se jen účelová funkce.

Vidíme, že jsme již v optimu.

Příklad 7.2. Přímou metodou řešte úlohu:

$$\begin{array}{rccccccc}
\text{min} & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Řešení. Pro jednu kladnou složku x_1 máme řešení, proto nemusím uvažovat 2x2 matice, kde tato kladná vystupuje - říkáme, že jde o degenerované řešení, protože odpovídá více přípustným bázím.

$$\mathcal{M} = conv\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

			6	-2	-8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_2	3	-1/2	1	0	-1/2	0	0
0	x_5	46	-3	0	0	-4	1	-2
-8	x_3	13	-1	0	1	-1	0	-1
		-110	3	0	0	9	0	8

			-6	2	8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_2	3	-1/2	1	0	-1/2	0	0
0	x_5	46	-3	0	0	-4	1	-2
8	x_3	13	-1	0	1	-1	0	-1
		110	-14	0	0	-10	0	-8

Optimální řešení: $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, optimální hodnota účelové funkce: 0.

Příklad 7.3. Řešte příklad (7.2) simplexovou metodou.

Řešení. Postupujeme stejně jako v příkladu (7.1), ovšem nyní máme již úlohu ve standardním tvaru a nepřidáváme žádnou kladnou skluzovou proměnnou. Pro dvojfázový simplex stačí přidat 2 pomocné proměnné z, abychom si vytvořili jednotkovou matici pro start první fáze.

			0	0	0	1	1
c	x	b	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
1	z_1	1	1	1	-1	1	0
1	z_2	2	2	1	1	0	1
		3	3	2	0	0	0
0	x_1	1	1	1	-1	1	0
1	z_2	0	0	-1	3	-2	1
		0	0	-1	3	-3	0
0	x_1	1	1	2/3	0	1/3	1/3
0	x_3	0	0	$-1/3$	1	$-2/3$	1/3
	0	0	0	0	0	-1	-1

Nalezli jsme přípustnou bázi (1, 0, 0). Pokračujeme druhou fází

			2	-1	3
c	x	b	x_1	x_2	x_3
2	x_1	1	1	2/3	0
3	x_3	0	0	$-1/3$	1
		2	0	4/3	0
-1	x_2	3/2	3/2	1	0
3	x_3	1/2	1/2	0	1
		0	-2	0	0

Optimální řešení je $(0, 3/2, 1/2)^T$ a optimální hodnota účelové funkce 0.

8. Dualita

Definice 8.1. K úloze ve standardním tvaru

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{za podmínek } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

přísluší duální úloha

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{za podmínek } & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Tvrzení 8.2. *Pokud má jedna z úloh optimální řešení, tak má optimální řešení i duální úloha a optimální hodnoty účelové funkce jsou si rovny. Navíc pro všechna přípustná řešení:*

$$\forall \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{y} : \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Příklad 8.3. Napište duální úlohu k úloze:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \ge & 40 \\ & 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 50 \\ & & & 3x_2 & + & 2x_3 & \le & 30 \\ & x_1 & & & & & \ge & 0 \\ & & & x_2 & & & \in & \mathbb{R} \\ & & & & & x_3 & \le & 0 \end{array}$$

Řešení. Úlohu si zapíšeme do tabulky následujícím způsobem:

	x_1	x_2	x_3		
	≥ 0	$\in \mathbb{R}$	≤ 0		
	1	-2	3	$\ge$	40
	3	5	1	$=$	50
	0	3	2	$\le$	30
					min
	3	4	-2	max	

Vedle koeficientů v účelové funkci píšeme min/max podle toho, zda maximalizujeme či minimalizujeme, ve druhém poli je korespondující druhá možnost. Do řádků omezení přidáme duální proměnné pomocí pravidla, že při "min" převádíme $\ge \leftrightarrow \ge, \le \leftrightarrow \le, = \leftrightarrow \in R$ a při "max" převádíme $\ge \leftrightarrow \le, \le \leftrightarrow \ge, = \leftrightarrow \in R$. Dále přidáme nerovnosti/rovnosti do sloupců, kde nám vzniknou omezení pro duální úlohu, rovnosti/nerovnosti přidáme podle opačného pravidla, než jsme přidávali nerovnosti pro duální proměnné. Pomůckou nám je přítomnost min/max v odpovídajícím řádku/sloupci, pak stačí vždy použít uvedená pravidla pro min/max. Tedy omezení pro duální proměnné jsou ve sloupci a přidáváme tyto omezení na základě sloupce nerovností, kde je max. Kdežto nerovnosti k omezením duální úlohy přidáváme na základě omezení primárních proměnných a v řádku, kam nerovnosti přidáváme, je min. Dostáváme tedy:

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	$\in \mathbb{R}$	≤ 0		
y_1	≤ 0	1	-2	3	$\ge$	40
y_2	$\in \mathbb{R}$	3	5	1	$=$	50
y_3	≥ 0	0	3	2	$\le$	30
		$\ge$	$=$	$\le$		min
		3	4	-2	max	

Nyní stačí tabulku číst odshora dolů:

$$\begin{array}{rrrrcr} \min & 40y_1 & +50y_2 & +30y_3 & & \\ \text{za podmínek} & y_1 & +3y_2 & & \geq & 3 \\ & -2y_1 & +5y_2 & +3y_3 & = & 4 \\ & 3y_1 & +y_2 & +2y_3 & \leq & -2 \\ & \multicolumn{5}{l}{y_1 \leq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geq 0} \end{array}$$

Příklad 8.4. Napište duální úlohu k úloze:

$$\begin{array}{rl} \min & x_0 \\ \text{za podmínek} & x_0 + x_i \geq v_i \ \forall i \in \{1,..,n\} \\ & x_i - x_{i+1} \leq d_i \ \forall i \in \{1,..,n-1\} \\ & x_i \leq m_i \ \forall i \in \{1,..,n\} \end{array}$$

Řešení. Úlohu si opět zapíšeme do tabulky. Máme $n+1$ primárních proměnných a $3n-1$ omezení.

		x_0 $\in \mathbb{R}$	x_1 $\in \mathbb{R}$	x_2 $\in \mathbb{R}$	... ...	x_{n-1} $\in \mathbb{R}$	x_n $\in \mathbb{R}$		
y_1		1	1	0	...	0	0	$\geq$	v_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_n		1	0	0	...	0	1	$\geq$	v_n
z_1		0	1	-1	...	0	0	$\leq$	d_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
z_{n-1}		0	0	0	...	1	-1	$\leq$	d_{n-1}
w_1		0	1	0	...	0	0	$\leq$	m_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
w_n		0	0	0	...	0	1	$\leq$	m_n
					...				max
		1	0	0	...	0	0	min	

Nyní opět doplníme omezení.

		x_0 $\in \mathbb{R}$	x_1 $\in \mathbb{R}$	x_2 $\in \mathbb{R}$	... ...	x_{n-1} $\in \mathbb{R}$	x_n $\in \mathbb{R}$		
y_1	≥ 0	1	1	0	...	0	0	$\geq$	v_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_n	≥ 0	1	0	0	...	0	1	$\geq$	v_n
z_1	≤ 0	0	1	-1	...	0	0	$\leq$	d_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
z_{n-1}	≤ 0	0	0	0	...	1	-1	$\leq$	d_{n-1}
w_1	≤ 0	0	1	0	...	0	0	$\leq$	m_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
w_n	≤ 0	0	0	0	...	0	1	$\leq$	m_n
		=	=	=	...	=	=		max
		1	0	0	...	0	0	min	

Nyní můžeme duální úlohu zapsat algebraicky s pomocí vytvořené tabulky.

$$
\begin{aligned}
\min & \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot w_i \\
\text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \\
& y_1 + z_1 + w_1 = 0, \\
& y_i - z_{i-1} + z_i + w_i = 0, && i = 2, ...n-1 \\
& y_n - z_{n-1} + w_n = 0, \\
& y_i \geq 0, && i = 1, ..., n \\
& z_i \leq 0, && i = 1, ..., n-1 \\
& w_i \leq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

Příklad 8.5. Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\min & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 2 \\
& x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -2 \\
& x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy.

Řešení. Pomocí tabulky získáme duální úlohu.

		x_1 ≥ 0	x_2 ≥ 0	x_3 ≥ 0		
y_1	≥ 0	1	1	-1	$\geq$	2
y_2	≥ 0	1	-2	0	$\geq$	-2
		$\leq$	$\leq$	$\leq$		max
		5	-2	1	min	

Ta má tvar:

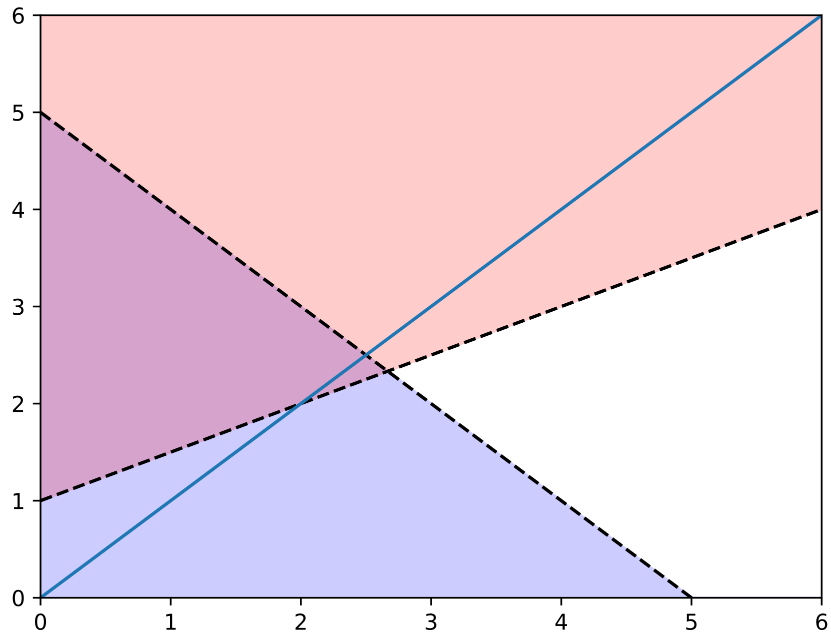
$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 2y_1 & - & 2y_2 & & \\
\text{za podmínek} & y_1 & + & y_2 & \leq & 5 \\
& y_1 & - & 2y_2 & \leq & -2 \\
& -y_1 & & & \leq & 1 \\
& y_1 & & & \geq & 0 \\
& & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

V Obrázku 8.1 si zakreslíme omezení a vrstevnici účelové funkce. Vidíme, že poslední omezení je již obsaženo v nezápornosti y_1.

Účelová funkce klesá směrem "doprava dolů", tedy optimální hodnotu získáme v průsečíku obou aktivních omezení. Snadno zjistíme, že se jedná o body $y_1 = 8/3, y_2 = 7/3$. Z podmínek komplementarity víme, že $x_3 = 0$, jelikož třetí omezení není splněno jako rovnost. Dále víme, že obě omezení jsou splněny jako rovnost v primární úloze, jelikož duální proměnné jsou nenulové. Máme tedy soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. Protože $y_1 > 0,\ y_2 > 0$ a $y_1 > -1$ máme

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\
x_1 - 2x_2 &= -2 \\
x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = 2/3, x_2 = 4/3$.



Obrázek 8.1. Grafické řešení duální úlohy 8.5.

Příklad 8.6. Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{min} & 2x_1 & + & x_2 & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & 2 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy.

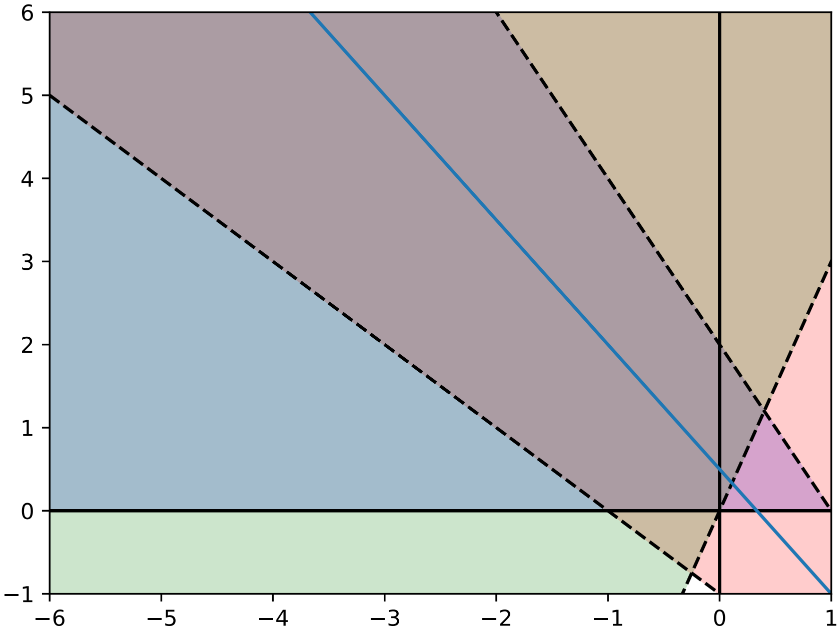
Řešení. Pomocí tabulky získáme duální úlohu.

		x_1 ≥ 0	x_2 ≥ 0	x_3 ≥ 0		
y_1	≤ 0	2	-1	3	$\leq$	3
y_2	≥ 0	1	-1	-1	$\geq$	2
		$\leq$	$\leq$	$\leq$		max
		2	1	0	min	

V Obrázku 8.2 Zakreslíme omezení a vrstevnici.

Jelikož účelová funkce roste směrem "nahoru doprava", vidíme, že úloha je neomezená. Tedy primární úloha je nepřípustná.

Příklad 8.7. Optimalizujte výrobní plán pro výrobky V_1, V_2, V_3 vyráběné z materiálů M_1 a M_2.



Obrázek 8.2. Grafické řešení duální úlohy 8.6.

	V_1	V_2	V_3	Omezení
M_1	1	0	2	54 kg
M_2	2	3	1	30 kg
zisk (Kč/kg)	10	15	10	

Řešení. Primární úloha je

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 10x_1 & + & 15x_2 & + & 10x_3 & & \\
\text{za podmínek} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 54 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 30 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Duální úloha je

$$\begin{array}{rrcrcl}
\min & 54y_1 & + & 30y_2 & & \\
\text{za podmínek} & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 10 \\
 & & & 3y_2 & \geq & 15 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 10 \\
 & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Optimální řešení je $\left(\frac{5}{2}, 5\right)^T$. Z komplementarity vyjde optimální řešení primární úlohy $(0, 1, 27)^T$. Optimální hodnota účelové funkce je v obou případech 285.

Neboli výrobek V_1 se nebude vyrábět, V_2 se bude vyrábět v množství 1 kg a V_3 v množství 27 kg. Zisk je 285 Kč. Obě podmínky jsou splněny jako rovnosti, takže není nespotřebovaný materiál (duální ceny jsou nenulové).

Duální proměnná y_i se nazývá duální (stínová) cena a představuje ocenění zdrojů (materiálu). Pokud zvýšíme pravou stranu v primární úloze o jedničku, zvýší se hodnota účelové funkce přesně o duální cenu.

U optimálního řešení duální úlohy není rovnost v prvním omezení, rozdíl činí 5/2. To znamená, že je třeba zvýšit jednotkový zisk V_1 alespoň o 2,5 Kč, aby se tento výrobek vyplatilo vyrábět (tento rozdíl se nazývá redukovaná cena).

Příklad 8.8. Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
\text{min} & & x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
\text{za podmínek} & - & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & -2 \\
 & & x_1 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & & & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & & x_3 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy.

9. Farkasova věta

Tvrzení 9.1 (Farkasova věta)**.** *Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení tehdy a jen tehdy, když pro každé $\boldsymbol{u}$, které splňuje $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq 0$, platí $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \geq 0$.*

Příklad 9.2. Rozhodněte, zda má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nezáporné řešení.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Příklad je přímo připravený na použití Farkasovi věty. Budeme tedy zkoumat, zda-li pro (u_1, u_2) taková, že $A^T u \geq 0$ platí $b^T u \geq 0$. Zapišme si nejdříve co znamená $A^T u \geq 0$.

$$\begin{array}{rrl}
2u_1 & -3u_2 & \geq 0 \\
u_1 & +2u_2 & \geq 0 \\
-u_1 & & \geq 0 \\
 & 4u_2 & \geq 0
\end{array}$$

A nyní zjistíme, jestli platí $b^T u \geq 0$, výraz budeme upravovat:

$$2u_1 + 6u_2 = 2 \cdot (u_1 + 2u_2) + 2u_2 \geq 0.$$

Poslední nerovnost platí z druhé a čtvrté rovnice předpokladů, tedy soustava má nezáporné řešení.

Příklad 9.3. Pomocí Farkasovy věty rozhodněte, zda je neprázdná množina

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z \leq 3,\ x + 2y + 2z = 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

Řešení. Soustavu převedeme do standardního tvaru rozdělením x na kladnou a zápornou část ($x = x^+ - x^-, x^+ \geq 0, x^- \geq 0$) a přidáním skluzové proměnné převedeme nerovnost na rovnost. Pak můžeme použít Farkasovu větu stejně jako v předchozím případě. Zapišme si tvar matice A a vektoru b.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nyní postupujeme stejně, zapíšeme rovnice předpokladů $A^T u \geq 0$ a zjišťujeme nezápornost $b^T u$.

$$\begin{array}{rrl} 2u_1 & +u_2 & \geq 0 \\ -2u_1 & -u_2 & \geq 0 \\ u_1 & +2u_2 & \geq 0 \\ -u_1 & +2u_2 & \geq 0 \\ u_1 & & \geq 0 \end{array}$$

$$3u_1 + 4u_2 = u_1 + 2 \cdot (u_1 + 2u_2) \geq 0.$$

Poslední nerovnost platí z třetí a páté rovnice předpokladů, tedy soustava má nezáporné řešení a množina je neprázdná.

Příklad 9.4. Napište Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy:

$$\{2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 2, -x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 = 6, 3x_1 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 \geq 3\}$$

pro $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}$. Úlohu vyřešte.

Příklad 9.5. Formulujte Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy:

(1) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$
(2) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$
(3) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$
(4) $\left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^T \in \mathbb{R}^{n+m} : \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \geq 0\right\}$

Řešení. Postupně.

(1) Pro úlohu ve tvaru nerovností:

$$\begin{aligned} \exists \boldsymbol{x} \geq 0 : \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I})^T \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} \geq 0,\ \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0 \end{aligned}$$

(2) Analogicky

$$\begin{aligned} \exists \boldsymbol{x} \geq 0 : \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{A}\ \ -\boldsymbol{I})^T \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} \geq 0,\ \boldsymbol{u} \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} \leq 0,\ \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \leq 0 \end{aligned}$$

(3) Převodem $\boldsymbol{Ax}^+ - \boldsymbol{Ax}^- = \boldsymbol{b} : \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{A}\ \ -\boldsymbol{A})^T \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0$, z čehož plyne podmínka: $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0$

(4) Převedeme: $\boldsymbol{Ax}^+ - \boldsymbol{Ax}^- + \boldsymbol{By} = \boldsymbol{b}$: $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{A}\ \ -\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})^T \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0$, z čehož: $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{u} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \geq 0$

Příklad 9.6. Mějme funkci

$$\begin{aligned} f(x) = \max_u \quad & (h - Tx)^T u \\ \text{s.t.} \quad & W^T u \leq q, \end{aligned}$$

kde $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p$ jsou reálné proměnné a $q \in \mathbb{R}^m, h \in \mathbb{R}^p, T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a $W \in \mathbb{R}^{p \times m}$ jsou reálné vektory/matice - parametry úlohy.

Ukažte, že pro všechna x, taková že $f(x) = \infty$ (úloha je neomezená) existuje vektor

$$v_x \in \mathbb{R}^p : \quad W^T v_x \leq 0 \wedge (h - Tx)^T v_x > 0.$$

10. Symetrická úloha NLP

Definice 10.1. Symetrickou úlohou nelineárního programování nazýváme úlohu

$$\begin{aligned} &\min\ f(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmínek } &g_k(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad k = 1, \ldots, m, \\ &x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

a přiřadíme ji Lagrangeovu funkci

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m} y_k g_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}.$$

Definice 10.2. Řekneme, že pro bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$ jsou splněny globální podmínky optimality (GPO) pro symetrickou úlohu nelineárního programování, je-li $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ sedlový bod Lagrangeovy funkce pro $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$, tj.

$$\forall \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}: \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) \ge L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \ge L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}).$$

Definice 10.3. Řekneme, že pro bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$ jsou splněny lokální podmínky optimality (LPO) pro symetrickou úlohu nelineárního programování, platí-li

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \ge 0, \quad \boldsymbol{x}^{*T} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0, \quad \boldsymbol{x}^* \ge 0, \\ \nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le 0, \quad \boldsymbol{y}^{*T} \nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0, \quad \boldsymbol{y}^* \ge 0. \end{aligned}$$

Poznámka 10.4.

$$\boldsymbol{x}^{*T} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0 \Rightarrow x_i^* \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

neboť

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \ge 0, \quad \boldsymbol{x}^* \ge 0.$$

Analogicky pro rovnice Lagrangeových multiplikátorů.

Poznámka 10.5. Pokud hledáme lokální extrém, linearizujeme (gradienty), a tím získáme úlohu lineárního programování. Lokální podmínky optimality jsou pak klasické podmínky komplementarity úlohy LP

Definice 10.6. Podmínky regularity

i) V bodě $\boldsymbol{x}$ je splněna *podmínka lineární nezávislosti*, jsou-li v bodě $\boldsymbol{x}$ nezávislé gradienty aktivních omezení.
ii) Úloha splňuje *Slaterovu podmínku*, jestliže existuje $\bar{\boldsymbol{x}} \ge 0$, pro které $g_k(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$.

Příklad 10.7. Nalezněte příklad, kdy nejsou splněny podmínky regularity a přitom existuje optimální řešení.

Řešení. Např. vytvořte úlohu, kde přípustné řešení je pouze jednobodový průnik dvou kruhů (bod [0,0]) a minimalizujte např. lineární funkci s gradientem jehož obě složky jsou nenulové. Pak pro jediný přípustný bod [0,0] neexistují Lagrangeovy multiplikátory tak, aby byly splněny podmínky optimality. Přitom ten bod je optimálním (jediným) řešením úlohy.

$$\min\left\{-x_1 + x_2 : \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1, (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \le 1, \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\}.$$

Tvrzení 10.8. *Platí následující implikace*

i) $\boxed{GPO} \Rightarrow \boxed{optimalita}$,
ii) $\boxed{optimalita}$ $+f, g_k$ *konvexní a splněna podmínka regularity nebo* g_k *lineární* $\Rightarrow \boxed{GPO}$,
iii) $\boxed{GPO}$ $+f, g_k$ *diferencovatelné* $\Rightarrow \boxed{LPO}$,
iv) $\boxed{LPO}$ $+f, g_k$ *konvexní a diferencovatelné* $\Rightarrow \boxed{GPO}$.

Příklad 10.9. Sestavte a vyřešte LPO pro úlohu

$$\max\left\{-x_1^2 - x_2^2 :\ x_1 + x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

Je nalezený bod opravdu globálním maximem?

Řešení. Převedeme na tvar úlohy SNLP.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + x_2^2 + y_1(2 - x_1 - x_2) + y_2(3 - 2x_1 - x_2).$$

LPO mají tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 - y_1 - 2y_2 &\geq 0, \\ 2x_2 - y_1 - y_2 &\geq 0, \\ x_1(2x_1 - y_1 - 2y_2) &= 0, \qquad (10.1)\\ x_2(2x_2 - y_1 - y_2) &= 0, \qquad (10.2)\\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - x_1 - x_2 &\leq 0, \\ 3 - 2x_1 - x_2 &\leq 0, \\ y_1(2 - x_1 - x_2) &= 0, \qquad (10.3)\\ y_2(3 - 2x_1 - x_2) &= 0, \qquad (10.4)\\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Je možné začít s rovnicemi (10.3) a (10.4) a řešit pro každou ze čtyř možností ($y_1 = 0, y_2 = 0$), ($y_1 = 0, y_2 > 0$), ($y_1 > 0, y_2 = 0$), ($y_1 > 0, y_2 > 0$). Zvolme nejprve $y_1 = y_2 = 0$. Z rovnic (10.1) a (10.2) pak neplyne přípustné řešení...

Můžeme si pomoci obrázkem, hledejme řešení na průniku hranic omezení, tj. $y_1 > 0, y_2 > 0$ pak z rovnic (10.3) a (10.4) plyne $x_1^* = x_2^* = 1$ a $y_1^* = 2, y_2^* = 0$ (gradient účelové funkce je shodný s gradientem funkce určující první hranici, proto Lagrangeův multiplikátor vychází 0) a LPO jsou splněny. Účelová funkce je konvexní a omezení také (dokonce lineární), proto je bod $[1, 1]$ globálním maximem.

Strategie s obrázkem je vhodná pro nalezení kandidáta, pro které pak vyřešíme LPO a přes GPO dokážeme, že jde o globální min/max. Bez dokázání implikací (LPO $\rightarrow$ GPO) a (GPO $\rightarrow$ glob. min/max) nelze dělat o případném kandidátovi žádné závěry.

Příklad 10.10. Nalezněte bod z množiny

$$\mathcal{M} = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 \leq e^{x_1}, x_2 \leq e^{-x_1}\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\},$$

který je nejlblíže bodu $[0, 3]$

Řešení. Převedeme na úlohu SNLP.

$$\min\left\{x_1^2 + (x_2 - 3)^2 :\ x_2 \leq e^{x_1}, x_2 \leq e^{-x_1}\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

a

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + y_1(x_2 - e^{x_1}) + y_2(x_2 - e^{-x_1}).$$

LPO mají tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 - y_1 e^{x_1} - y_2 e^{-x_1} &\geq 0, \\ 2x_2 + 6 + y_1 + y_2 &\geq 0, \\ x_1(2x_1 - y_1 e^{x_1} - y_2 e^{-x_1}) &= 0, \qquad (10.5)\\ x_2(2x_2 + 6 + y_1 + y_2) &= 0, \qquad (10.6)\\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 - e^{x_1} &\le 0,\\
x_2 - e^{-x_1} &\le 0,\\
y_1(x_2 - e^{x_1}) &= 0, \qquad (10.7)\\
y_2(x_2 - e^{-x_1}) &= 0, \qquad (10.8)\\
y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Z obrázku hledejme řešení na průniku hranic množin, tj. $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, ale omezení nejsou konvexní!

Příklad 10.11. Nalezněte bod z množiny

$$\mathcal{M} = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \ge (x_2 - 1)^2, x_1 + 2x_2 \ge 2, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\},$$

který je nejblíže bodu $[-1, 0]$

Řešení.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + y_1((x_2 - 1)^2 - x_1) + y_2(2 - x_1 - 2x_2).$$

LPO mají tvar

$$
\begin{aligned}
2(x_1 + 1) - y_1 - y_2 &\ge 0,\\
2x_2 + 2y_1(x_2 - 1) - 2y_2 &\ge 0,\\
x_1(2(x_1 + 1) - y_1 - y_2) &= 0, \qquad (10.9)\\
x_2(2x_2 + 2y_1(x_2 - 1) - 2y_2) &= 0, \qquad (10.10)\\
x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x_2 - 1)^2 - x_1 &\le 0,\\
2 - x_1 - 2x_2 &\le 0,\\
y_1((x_2 - 1)^2 - x_1) &= 0, \qquad (10.11)\\
y_2(2 - x_1 - 2x_2) &= 0, \qquad (10.12)\\
y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Na základě obrázku hledejme řešení na průniku hranic obou množin, tj. $y_1 > 0, y_2 > 0$. Pak průnikem hranic omezení je bod $[0, 1]$ a např. $y_1^* = 1, y_2^* = 1$. Účelová funkce je konvexní, omezení také, proto bod $[0, 1]$ je optimálním řešením.

Příklad 10.12. Sestavte a vyřešte LPO pro úlohu

$$\max\left\{-x_1^2 - x_2^2 : \ x_1 + x_2 \ge 4, 2x_1 + x_2 \ge 5, \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\}.$$

Je nalezený bod opravdu globálním maximem?

Řešení. Převedeme na tvar úlohy SNLP.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + x_2^2 + y_1(4 - x_1 - x_2) + y_2(5 - 2x_1 - x_2).$$

LPO mají tvar

$$
\begin{aligned}
2x_1 - y_1 - 2y_2 &\ge 0,\\
2x_2 - y_1 - y_2 &\ge 0,\\
x_1(2x_1 - y_1 - 2y_2) &= 0, \qquad (10.13)\\
x_2(2x_2 - y_1 - y_2) &= 0, \qquad (10.14)\\
x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 4 - x_1 - x_2 &\leq 0, \\ 5 - 2x_1 - x_2 &\leq 0, \\ y_1(4 - x_1 - x_2) &= 0, \qquad (10.15) \\ y_2(5 - 2x_1 - x_2) &= 0, \qquad (10.16) \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Z obrázku je vidět, že aktivní je omezení dané první nerovnicí, proto počítejme s $y_1 > 0, y_2 = 0$. Pak řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x_1(2x_1 - y_1) &= 0, \\ x_2(2x_2 - y_1) &= 0, \\ 4 - x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

upravme dále na

$$\begin{aligned} x_1(2x_1 - y_1) &= 0, \\ (4 - x_1)(8 - 2x_1 - y_1) &= 0. \end{aligned}$$

Je-li $x_1 = 0$, je $y_1 = 8$ a není splněna první nerovnost v LPO. Je-li $x_1 > 0$, je řešením bod $x_1^* = x_2^* = 2, y_1^* = 4, y_2^* = 0$ a LPO jsou splněny. Účelová funkce je konvexní a omezení také (dokonce lineární), proto je bod $[2, 2]$ globálním maximem.

Příklad 10.13. Sestavte a vyřešte LPO pro úlohu

$$\max \{\log x_1 + \log x_2 : \ e^{x_1} + e^{x_2} \leq \alpha, \ x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\},$$

kde $\alpha \geq 2e$. Je nalezený bod opravdu globálním maximem?

Řešení. Posunutím souřadnic převedeme na úlohu SNLP.

$$\min \left\{-\log(z_1 + 1) - \log(z_2 + 1) : \ e^{z_1+1} + e^{z_2+1} \leq \alpha, \ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\right\},$$

$z_i = x_i - 1$, $i = 1, 2$.

$$L(\boldsymbol{z}, y) = -\log(z_1 + 1) - \log(z_2 + 1) + y(e^{z_1+1} + e^{z_2+1} - \alpha).$$

LPO mají tvar

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z_1 + 1} + ye^{z_1+1} &\geq 0, \\ -\frac{1}{z_2 + 1} + ye^{z_2+1} &\geq 0, \\ z_1 \left(-\frac{1}{z_1 + 1} + ye^{z_1+1}\right) &= 0, \qquad (10.17) \\ z_2 \left(-\frac{1}{z_2 + 1} + ye^{z_2+1}\right) &= 0, \qquad (10.18) \\ z_1 \geq 0, z_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{z_1+1} + e^{z_2+1} - \alpha &\leq 0, \\ y(e^{z_1+1} + e^{z_2+1} - \alpha) &= 0, \qquad (10.19) \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Zvolme nejprve $y = 0$. Z rovnic (10.17) a (10.18) pak plyne $z_1^* = z_2^* = 0$, což je přípustné pouze pro $\alpha = 2e$. Pro $z_1^* = 0$ dostáváme z podmínky optimality, že $y \geq 1/e$ a z (10.18) pak nutně $z_2^* = 0$ a jsme viz předchozí případ. Podobně když $z_2^* = 0$.

Uvažme nyní $y, z_1, z_2 > 0$ pak ze symetrie rovnic (10.17) a (10.18)a monotónnosti funkce

$$y = f(z) = \frac{e^{-z-1}}{z+1}$$

plyne, že $z_1^* = z_2^*$. Dosazením do rovnice (10.19) získáme $z_1^* = z_2^* = \log \frac{\alpha}{2} - 1$ a LPO jsou splněny. Tento vzoreček pak zahrnuje i případ kdy $z_1^* = z_2^* = 0$.

Podmínka regularity: Pro $\alpha > 2e$ evidentně existuje vnitřní bod z množiny přípustných řešení $\Rightarrow$ Slater. Účelová funkce i omezení jsou konvexní a je splněna podmínka regularity. Každé globální optimum je řešením LPO. Jediným řešením je bod $[\log \frac{\alpha}{2}, \log \frac{\alpha}{2}]$. Z konvexity a diferencovatelnosti funkcí f a g pak získáme, že tento bod jediným globálním maximem. Pro $\alpha = 2e$ je řešení jediným přípustným bodem úlohy.