

ŠKODA, koncernový podnik, PLZEŇ
ÚSTŘEDNÍ VÝZKUMNÝ ÚSTAV
Výzkum strojírenský

"Duševní majetek k.p. ŠKODA - nelze využít bez jeho souhlasu"

Doc. RNDr. Jindřich Nečas, DrSc. MDT: 519.3:539.383
Ing. RNDr. Ivan Hlaváček, CSc.
RNDr. Jaroslav Haslinger, CSc.
RNDr. Jan Mandel, CSc.
Ing. Tomáš Roubíček
RNDr. Štěpán Zámečník, CSc.

Optimalizace termoelastických
systémů
část III

Zakázkové číslo: 715-092-3019/7

Odpovědný pracovník: RNDr. L. Prášek, CSc. Číslo zprávy: Sz 4482V
Vedoucí střediska: Ing. V. Hauer, CSc. Druh zprávy: průběžná
Vedoucí odboru: Ing. M. Balda, CSc. Číslo kopie: 8
Ředitel ústavu: Ing. Z. Kletečka, CSc.

Stran: 86

Tabulek: 1

Obrázků: 4

V Plzni, prosinec 1985

A n o t a c e

MDT: 519.3:539.383 -

Sz 4482 V

Nečas J., RNDr., Doc., CSc.

Hlaváček I., RNDr., Ing., CSc.

Haslinger J., RNDr., CSc.

Mandel J., RNDr., CSc.

Roubíček T., Ing.

Zámečník Š., RNDr., CSc.

Optimalizace termoelastických systémů - část III

Plzeň, ŠKODA - ÚVZÚ-VS, 1985

86 stran, 1 tabulka, 4 obrázky

V teoretické části je dokázána konvergence přibližných řešení optimalizační úlohy k řešení původní úlohy optimalizace. V praktické části jsou sestaveny a odlaďeny programy výpočtu přímé termoelastické úlohy a automatické generování triangulací pro optimalizační algoritmus. Další kapitola obsahuje nový infinitesimální model optimalizačního problému.

prosinec 1985

O b s a h

list

1. Numerická realizace úlohy optimálního návrhu	4
1.1 Operátor A - sestavení triangulace	5
1.2 Operátor A - termoelastické rovnice	7
1.3 Cenový funkcionál j	12
1.4 Optimalizační algoritmus	14
1.5 Implementační poznámky	19
1.6 Popis vstupních dat	22
2. Analýza konvergence přibližných řešení optimalizační úlohy	29
3. Abstraktní teorie řešení úloh optimálního návrhu oblastí a jejich aproximace	58
4. Výpočet gradientu účelové funkce úlohy optimalizace kruhových otvorů	69
5. Závěr	85
Literatura	86

1. Numerická realizace úlohy optimálního návrhu

Budeme se zabývat optimalizační úlohou ve tvaru:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalizovat } j(x) \\ \text{za podmínek } x = A(u), \quad u \in U. \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

$u \in \mathbb{R}^7$ bude vektor návrhových proměnných, který bude mít (při využití symetrie úlohy) 7 složek: souřadnice a poloměry dvou chladicích otvorů a teplotu chladicí kapaliny; $U \subset \mathbb{R}^7$ bude množina přípustných návrhových proměnných; $x \in \mathbb{R}^m$ bude stav úlohy, za který budeme považovat rozložení teploty a redukovaného termoelastického napětí (podle Hencki - Miezies - Huber) v tělese; $A: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^m$ bude operátor přiřazující návrhovému proměnnému příslušný stav; a nakonec $j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ bude cenový funkcionál. Úloha (1.1) bude řešena optimalizačním algoritmem. Pro jednoduchost bude množina U popsána pouze tzv. triviálními omezeními, tj. $U = \{u \in \mathbb{R}^7; u_i^{\min} \leq u_i < u_i^{\max}; \forall i = 1, \dots, 7\}$ jejichž začlenění do optimalizačního algoritmu je naprosto bez problémů. Hodnoty $u_i^{\min}$, $u_i^{\max}$ jsou určeny buď konstrukčními omezeními, nebo požadavkem, aby nedošlo k degeneraci triangulace sestavené podle vektoru $u \in U$. V následujícím popíšeme podrobněji realizaci operátoru A (tj. sestavení triangulace a řešení termoelastických rovnic metodou konečných elementů s lineárním trojúhelníkovým prvkem), volbu cenového funkcionálu a optimalizační algoritmus. Zároveň budou uvedeny výsledky modelového příkladu.

1.1 Operátor A - sestavení triangulace

Tato část výpočtu je realizována podprogramem TRIANG.

Při jeho prvním vyvolání se provedou následující činnosti:

1. Pomocí podprogramu GRID (viz předešlá zpráva) se sestaví triangulace referenční oblasti $\hat{\Omega}$, znázorněné na obr. 1.1. Jednotlivé podoblasti (číslované podtrženě) se triangulují rovnoměrně, tj. rozdělením stran na počet stejných dílků (počet je zadán v datech; obr. 1.3, odstavec 5), a vzniklé čtyřúhelníky³ se rozdělí vždy na dva trojúhelníky kratší úhlopříčkou.
2. Sestaví se seznamy hraničních uzlů pro všechny okrajové podmínky.
3. Přečtou se souřadnice hraničních zadávacích bodů 1 až 8 oblasti Ω_u (viz data, obr. 1.3, odstavec 6, a obr. 1.2).
4. Oblast $\hat{\Omega}$ se transformuje do oblasti Ω_u , zvané souřadnicemi osmi hraničních bodů, souřadnicemi středů a poloměry otvorů takto:

a) Podoblasti 1 až 8, které mají v referenční oblasti $\hat{\Omega}$ tvar lichoběžníka, přejdou na podoblasti oblasti Ω_u podle obr. 1.4.

b) Podoblast 9 se transformuje bilineárně.

Při této transformaci přejdou uzly referenční triangulace na uzly v oblasti Ω_u . Na těchto uzlech se definuje triangulace podle incidence v triangulaci oblasti $\hat{\Omega}$, tj. pole L , které obsahuje seznam čísel trojic uzlů tvořících trojúhelníky, se nemění.

5. Triangulace oblasti Ω_u se reorganizuje tak, aby vždy dva sousední trojúhelníky vzniklé rozdělením čtyřúhelníka (před transformací) byly odděleny jeho kratší úhlopříčkou (po transformaci).

6. Uzly se přečísľují tak, aby šířka polopásu matice tuhosti byla co nejmenší. Nejdřívě se uzly přečísľují lexikografickým uspořádaním podle souřadnic (podprogram SEZNAØ) a pak se volá (NOPTIM-1) - krát podprogram SEZNA1 (viz předešlá zpráva).

Přetřazení lexikografického uspořádaní bylo vynuceno tím, že na použité triangulaci se složitou incidenční strukturou není SEZNA1 příliš efektivní bez tohoto předběžného přečíslování. Experimentálně bylo zjištěno, že NOPTIM>2, tj. opakování vyvolání SEZNA1, již šířku polopásu dále nezmenšuje.

NOPTIM se zadává v odstavci 7 dat.

Při každém dalším vyvolání podprogramu TRIANG se provede pouze bod 4, tj. transformace souřadnic uzľů z $\hat{n}$ do n_u .

Vhodnou volbou nelineární transformace $\hat{n}$ na n_u bylo dosaženo toho, že triangulace se v okolí otvorů zjemňuje, a vnitřní úhly trojúhelníků nedegenerují k nule.

Při koncepci tohoto programu jsme počítali s tím, že by mohlo být vhodné přidat další uzly a trojúhelníky k lepšímu vystižení tvaru odlitku. Toto lze provést snadnou úpravou programu; podrobný návod k této úpravě je vložen na příslušném místě programu jako komentář.

1.2 Operátor A -thermoelastické rovnice

Na triangulaci sestavené podle předchozího odstavce se řeší metodou konečných elementů s lineárním prvkem rovnice thermoelasticity. Všechny koeficienty budou uvažovány konstantní. Uvedeme zde rovnice ve slabé formulaci.

Rovnice vedení tepla:

hledá se $\vartheta \in H^1(\Omega)$; $\vartheta - \vartheta_0 \in V_\perp$,

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \vartheta \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha \vartheta w \, ds = \int_{\Gamma_2} \gamma w \, ds + \int_{\Gamma_3} \alpha \vartheta_{\text{okolí}} w \, ds \quad \forall w \in V_\perp ,$$

$$V_\perp = \{ w \in H^1(\Omega) ; w|_{\Gamma_1} = 0 \} .$$

Vidíme tedy, že na části hranice Γ_λ (viz obr 1.2) jsou předepsány okrajové podmínky i-tého druhu , $\lambda = 1, 2, 3$.

Na částech Γ_4, Γ_5 jsou z důvodů symetrie předepsány homogenní Neumannovy podmínky.

Rovnice elasticity:

hledá se posunutí $u \in (H^1(\Omega))^2$; $u \in V_e$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij}(u, \vartheta, \varepsilon_z) \varepsilon_{ij}(v) \, dx = 0 \quad \forall v \in V_e ,$$

$$V_e = \{ u = (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2 , v_1|_{\Gamma_4} = 0 , v_2|_{\Gamma_5} = 0 \}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(u, \vartheta, \varepsilon_z) = & \frac{E}{1+\sigma} (\varepsilon_{ij}(u) + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (\varepsilon_{11}(u) + \\ & + \varepsilon_{22}(u) + \varepsilon_z) \delta_{ij} - \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \alpha_z \vartheta \delta_{ij}) . \end{aligned}$$

Význam koeficientů je uveden níže.

Vidíme tedy, že na částech hranice Γ_4, Γ_5 jsou předepsány homogenní Dirichletovy podmínky pro posunutí v normálových směrech. Tyto podmínky vznikají ze symetrie a zabezpečují koercivitu úlohy. Na zbylé části hranice jsou předepsány homogenní Neumannovy podmínky (tj. tlak taveniny, chladící kapaliny, a atmosferický tlak se zanedbává). Uvažuje se, že forma je nekonečná ve směru kolmém k uvažovanému řezu, ε_z označuje deformaci v tomto směru (ε_z je konstantní). Tenzor deformace má tedy tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (V)$$

a tenzor napětí má tvar

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_z \end{pmatrix},$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(u, v, \varepsilon_z)$$

$$\tau_z = \tau_z(u, v, \varepsilon_z) =$$

$$= \frac{E}{1+\sigma} \left(\varepsilon_z + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u) + \varepsilon_z) - \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \alpha_z v \right)$$

Tepelné namáhání se posuzuje podle redukovaného napětí (Hencki - Huber - Miezies):

$$\tau_{red} = \left(\frac{1}{2} ((\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2) \right)^{1/2},$$

kde τ_i jsou vlastní čísla (tzv. hlavní napětí) tenzoru τ , jež lze vzhledem ke speciálnímu tvaru tohoto tenzoru snadno spočítat. Zbývá určit ϵ_z . Mohli bychom zvolit $\epsilon_z = 0$, což by odpovídalo situaci, že forma je v nekonečnu upnutá. Daleko realističtější se však zdá situace, že forma je v nekonečnu volná. Tomu odpovídá takové ϵ_z , pro které je výsledná síla působící ve směru kolmém na uvažovaný řez rovna nule, tj.

$$F(\epsilon_z) = \int_n \tau_z(\dots, \epsilon_z) = 0.$$

Protože $F(\cdot)$ je lineární funkcí, můžeme rovnici $F(\epsilon_z) = 0$ vyřešit numericky tak, že řešíme výše uvedené rovnice pro $\epsilon_z^{(1)}$ a $\epsilon_z^{(2)}$, a potom vypočteme $\epsilon_z = (F(\epsilon_z^{(1)}) \cdot \epsilon_z^{(2)} - F(\epsilon_z^{(2)}) \cdot \epsilon_z^{(1)}) / (F(\epsilon_z^{(1)}) - F(\epsilon_z^{(2)}))$. Stačí tedy řešit rovnice elasticity pro tři pravé strany. Protože se ale v našem případě může forma volně roztahovat (nejen ve směru kolmém na řez, ale i ve všech ostatních směrech), můžeme v elastických rovnicích uvažovat "posunutou" teplotu $\bar{\nu} = \nu + \nu_{kor}$ aniž se přitom změní tenzor napětí (ν_{kor} je konstantní). Numerické experimenty ukazují, že zvolíme-li $\epsilon_z = 0$ a korekci ν_{kor} tak, aby

$$\int_n \bar{\nu} dx = 0 \quad \left(\text{tedy } \nu_{kor} = -\frac{1}{\text{meas } n} \int_n \nu dx \right),$$

dostaneme $F(\epsilon_z) = 0$ (s přesností stroje!). Pak ovšem stačí řešit rovnice elasticity jen pro jednu pravou stranu. (Různé alternativy výpočtu řídí proměnná isa , viz podprogram TE).

Diskretizované rovnice dostaneme tak, že místo prostorů V_t a V_e vezme jejich podprostory tvořené po částech lineárními funkcemi na zvolené triangulaci. Nebudeme zde uvádět vzniklé rovnice, neboť se jedná o standardní postup. Bylo přitom použito algoritmů z již dříve užitého programu KACMET a z knihy J. Valenta et al.: Novodobé metody výpočtů tuhosti a pevnosti ve strojírenství (SNTL, Praha, 1975).

Příslušné výpočty (tj. sestavení matice vodivosti a tuhosti, sestavení pravé strany rovnice pro teplotu, výpočet teploty a tepelného zatížení, řešení rovnice pro elastická posunutí, výpočet deformace, napětí a redukovaného napětí) spolu s jednoduchými výpočty plynoucími z odstavce 4.3 jsou realizovány podprogramem TE, kde jsou též dostatečně komentovány.

Podprogram TE volá pouze knihovní podprogram MCHB (knihovna SSP implementovaná na počítačích IBM a EC), který řeší soustavy lineárních algebraických rovnic se symetrickou pásovou maticí metodou Choleskiho dekompozice. Podprogram MCHB se používá pro rovnice vedení tepla i elasticity. Správnost podprogramu TE byla testována na čtverci. Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla byly vedeny tak, aby řešení vycházelo lineární na celé oblasti. Potom pro konstantní (nulovou nebo nenulovou) teplotu byly testovány rovnice elasticity pro takové okrajové podmínky, aby posunutí vycházelo lineární na celé oblasti. Pak je tenzor deformace i napětí konstantní (celkem bylo otestováno 6 takových eventualit).

Význam označení a hodnoty použité v modelovém příkladu jsou následující:

- α - tepelná vodivost, $\alpha = 40 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}$;
- α - součinitel přestupu teplota konvekce (mezi formou a okolím), $\alpha = 30 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$;
- $\bar{\vartheta}_0$ - teplota chladicí kapaliny (sedmá složka vektoru návrhových proměnných v úloze (4.1));
- $\bar{\vartheta}_{\text{okolí}}$ - teplota okolí formy, $\bar{\vartheta}_{\text{okolí}} = 20^\circ \text{C}$
- γ - výsledky identifikace toků přes hranici Γ_2 (viz předchozí výzk. zprávy), $\gamma = \text{konst.} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ kg s}^{-3}$;
- E - Youngův modul pružnosti, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$;
- σ - Poissonova konstanta, $\sigma = 0,3$;
- α_t - koeficient teplotní roztažnosti, $\alpha_t = 10^{-5} \cdot \text{K}^{-1}$.

Zmiňme se ještě o jednom zjednodušení, totiž Dirichletovy podmínky jsou v podprogramu TE uvažovány pouze homogenní. To u elastických rovnic nepřináší žádná omezení, a u rovnice vedení tepla uijeme toho, že pravá strana v Dirichletových podmínkách je konstantní ($= \bar{\vartheta}_0$) a "posunutím" teploty o konstantu se nezmění tenzor napětí. Pak zřejmě "posunutím" teploty $-\bar{\vartheta}_0$ získáme homogenní Dirichletovy podmínky. To je realizováno před vyvoláním podprogramu TE v programu "F" posunutím $\bar{\vartheta}_{\text{okolí}}$ a $\bar{\vartheta}_d$ (viz následující odst.).

1.3 Cenový funkcionál j

Na volbě cenového funkcionálu podstatně závisí úspěšnost úlohy optimálního návrhu. Bylo uvažováno

$$j(\vartheta, \tau_{red}) = \int_{\Omega} \tau_{red}^r dx + k \int_{\Gamma_2} |\vartheta - \vartheta_d|^s ds$$

Zkušenosti s podobnými úlohami ukazují, že minimalizací j ve výše uvedeném tvaru dochází ke zmenšení τ_{red} a $|\vartheta - \vartheta_d|$ na Γ_2 v L^∞ normách. Snížení $\|\tau_{red}\|_{L^\infty(\Omega)}$ má význam pro zvětšení životnosti formy. Význam ϑ_d může být dvojitý: buď je ϑ_d požadovaná teplota na Γ_2 , která je důležitá z hlediska tuhnutí taveniny ve formě, nebo je ϑ_d teplota na Γ_2 při výchozím návrhu. Při této druhé možnosti se dá předpokládat, že $\vartheta|_{\Gamma_2}$ bude blízké teplotě, při které se identifikovaly toky γ přes hranici Γ_2 , a tedy skutečné toky při optimalizovaném návrhu se nebudou příliš lišit od toků γ , což dává celé identifikační úloze smysl. Bylo by samozřejmě velmi vhodné, aby teplota na Γ_2 při výchozím návrhu byla zároveň požadovanou teplotou.

Koeficient k je nutno volit "rozumně". Při příliš malém k by se pravděpodobně výsledné hodnoty $\vartheta|_{\Gamma_2}$ značně lišily od ϑ_d , což by celý návrh patrně dosti znehodnocovalo. Na druhé straně, při příliš velkém k by mohlo při optimálním návrhu docházet k velkému teplotnímu namáhání, protože člen $\int_{\Omega} \tau_{red}^r dx$ by byl zanedbatelný ve srovnání se členem $k \int_{\Gamma_2} |\vartheta - \vartheta_d|^s ds$ (obecně lze totiž těžko očekávat alespoň přibližné splnění rovnosti $\vartheta = \vartheta_d$ při optimálním návrhu v případě, že počet uzlů ležících při konečně-elementové aproximaci na Γ_2 bude větší než počet návrhových proměnných, tj. 7).

Také exponenty r, s je nutno volit "rozumně". Velké hodnoty lépe korespondují s normami v L^∞ , které jsou vhodné z praktického hlediska. Na druhé straně ovšem velké hodnoty r, s mají nepříznivé numerické vlastnosti (dostáváme optimalizační úlohy s "rychle se měnícím" gradientem, tj. numericky nehladké). Z numerického hlediska nemá smysl brát r, s větší než cca 10 až 20.

Vidíme tedy, že při zvoleném tvaru cenového funkcionálu je volba ϑ_d, k, r, s záležitostí jistého umění. Vhodná volba patrně dosti závisí na konkrétní situaci, která však nebyla k dispozici. Proto byly zvoleny (dosti náhodně) následující hodnoty pro modelový příklad: $\vartheta_d = \text{konst} = 380^\circ\text{C}$, $k = 50 (\text{MPa})^2 \text{mK}^{-2}$, $r = s = 2$.

1.4 Optimalizační algoritmus

Optimalizační úloha (1.1) se řeší jednoduchým optimalizačním algoritmem gradientního typu. Jeden krok tohoto algoritmu má tvar

$$u^{k+1} = P_u(u^k + c^k \cdot M \cdot \text{grad } J(u^k)),$$

kde $J(u) = j(A(u))$, M je matice určující metriku v prostoru návrhových parametrů (M symetrická, pozitivně definitní), $c^k < 0$ je délka kroku, $P_u: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ je projekce na množinu přípustných návrhových parametrů U .

Matice M byla volena diagonální: $M = (m_i \delta_{ij})_{i,j=1,7}$,
 $m_1, \dots, m_6 = 10^{-10} (\text{MPa})^{-2}$, $m_7 = 10^{-3} (\text{MPa})^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ K}^2$.

Zdůrazňeme, že by nebylo vhodné volit M jednotkovou matici, neboť její prvky mají různý fyzikální rozměr. Jako délka kroku c^k se vzal argument infima paraboly:

$$G(c) = g(0) + g'_-(0)c + (g(c^{k-1}) - g(0) - g'_-(0) \cdot c^{k-1}) c^2 / (c^{k-1})^2$$

na intervalu $[5c^{k-1}, 0]$, kde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definováno

vztahem:

$$g(c) = J(P_u(u^k + c \cdot M \cdot \text{grad } J(u^k)))$$

a $g'_-(0)$ je derivace funkce $g(\cdot)$ v nule zleva. Zřejmě platí:

$$g'_-(0) = \sum_{i \in I} m_i \left(\frac{\partial J}{\partial u_i}(u^k) \right)^2,$$

kde I je množina těch indexů i , $1 \leq i \leq 7$, pro které

$\exists c < 0$ takové, že

$$u_i^{\min} < u_i^k + c m_i \frac{\partial J}{\partial u_i} < u_i^{\max}.$$

V případě, že nedošlo k poklesu J , tj. $g(c^k) \geq g(0)$, uvažoval se poloviční krok, tj. místo c^k se zvolilo $c^k/2$, atd. Tím se po konečném počtu rozpučení délky kroku dosáhne poklesu minimalizované funkce J (za předpokladu, že J je hladká, u^k nerealizuje minimum J na U a gradient J je spočten dostatečně přesně).

Pro odstartování optimalizačního algoritmu je nutné zvolit $u^0 \in U$ a c^{-1} . V modelovém příkladu bylo zvoleno:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= 0,15 \text{ m}, & u_2^0 &= 0,15 \text{ m}, & u_3^0 &= 0,03 \text{ m}, & u_4^0 &= 0,4 \text{ m} \\ u_5^0 &= 0,2 \text{ m}, & u_6^0 &= 0,03 \text{ m}, & u_7^0 &= 20^\circ\text{C}, & c_1^{-1} &= 20. \end{aligned}$$

Na modelovém příkladu tento jednoduchý optimalizační algoritmus velmi dobře minimalizoval cenový funkcionál v počáteční fázi optimalizace. Dá se ovšem očekávat, že v okolí optimálního návrhu by tento jednoduchý algoritmus nebyl příliš úspěšný. Avšak s ohledem na to, že není úplně jasné, jak zvolit cenový funkcionál, není také nutné řešit optimalizační úlohu příliš přesně.

Výsledky prvních 7 iterací optimalizačního algoritmu jsou uvedeny v tabulce 1.1. Kromě návrhových proměnných u a cenového funkcionálu $J(u)$ jsou uváděny: maximální odchylky $|\sigma - \sigma_d|$ na Γ_2 (označené J_1) a maximální redukované napětí τ_{red} (označené J_2). Dodejme, že maximum redukovaného napětí se realizovalo na elementu č. 262, tj. u hranice Γ_2 v blízkosti druhého chladicího otvoru. Síť pro původní a pro optimalizovaný návrh (tj. pro u^k , $k=0$ a 7) je v grafickém zpracování na tiskárně uvedena v příloze. V síti jsou vyznačena čísla uzlů, a v prvním případě též čísla elementů. Číslování uzlů je v obou sítích různé, protože síť byla před kreslením znovu generována. Bohužel, pro dlouhodobou poruchu na kreslicím zařízení fy. Hewlett-Packard instalovaném v SVT ČSAV nebylo možné přiložit kvalitněji zpracovanou triangulaci, i když kreslení triangulací na tomto zařízení bylo již odzkoušeno (včetně odladění jednoduchých kreslicích a čtecích programů na kalkulátoru Hewlett-Packard).

Zmiňme se ještě o problému výpočtu gradientu minimalizované funkce J . Přesný (při zanedbání zaokrouhlovacích chyb) výpočet známou metodou sdružených rovnic je sice rychlý, avšak algoritmicky a programově velice náročný (zejména proto, že matice vodivosti a tuhosti složitým způsobem závisí na návrhových proměnných). Byla proto zvolena možnost numerického výpočtu gradientu, který je ve srovnání s předchozí možností triviální co se týče algoritmu a při sedmi návrhových proměnných se dá očekávat, že není pomalejší více než 4krát. Vzhledem k tomu, že výpočet J je zatížen pouze zaokrouhlovacími chybami (např. soustavy algebraických rovnic jsou řešeny finitními a nikoli iteračními metodami), bylo možno v modelovém příkladu spočítat gradient touto metodou na dvě až tři platná místa, což postačovalo pro optimalizační algoritmus (slepoň v počáteční fázi optimalizace - viz tab. 1.1).

Pro výpočet: $\text{grad } J(u^k)$ bylo použito přibližného vzorce:

$$(\text{grad } J(u^k))_i = (J(u^k + \delta_i) - J(u^k)) / s_i, \quad i = 1, \dots, 7,$$

kde vektor $\delta_i \in \mathbb{R}^7$ má složky $(\delta_i)_j = s_i \delta_{ij}$, δ_{ij} je Kroneckerův

symbol. Po vyzkoušení několika hodnot s_i bylo v modelovém příkladu zvoleno:

$$s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad s_3 = s_6 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad s_7 = 10^{-2} \text{ K}$$

Na těchto hodnotách ovšem příliš nezáleží. V případě potřeby by bylo možno zpřesnit numerický výpočet gradientu zmenšením s_i a provedením výpočtu J ve dvojnásobné přesnosti (místo podprogramu MCHB by pak bylo nutno použít podprogram DMCHB).

Gradient stavu x podle návrhových proměnných u lze vypočítat výhodně následujícím úsporným způsobem (v této fázi práce nebylo implementováno):

Operátor $x = A(u)$ je zadán řešením soustavy lineárních rovnic

$$Bx = f,$$

kde $B = B(u)$, $f = f(u)$. Chceme vypočítat

$$x_0 = x(u), \quad x_i = x(u + \delta_i), \quad i = 1, \dots, 7.$$

Nejdříve spočítáme $B_0 = B(u) = f_0 = f(u)$

$$x_0 = B_0^{-1} f_0$$

a uložíme dekompozici B_0 . Pro každé $i = 1, \dots, 7$

spočítáme $B_i = B(u + \delta_i)$, $f_i = f(u + \delta_i)$.

Stav x_i vyhovuje soustavě

$$B_i \varepsilon_i = f_i - B_i x_0,$$

kde

$$\varepsilon_i = x_i - x_0.$$

Nyní lze ε_i aproximovat výrazem

$$\varepsilon_i \approx B_0^{-1} (f_i - B_i x_0).$$

Tento výpočet lze chápat jako první krok iterační metody

$$\varepsilon_i^{k+1} = \varepsilon_i^k - B_0^{-1} [B_i \varepsilon_i^k - (f_i - B_i x_0)]$$

s počátečním přiblížením $\varepsilon_i^0 = 0$.

Pro takto definované ε_i^k platí odhad chyby

$$\|\varepsilon_i^k - \varepsilon_i\| \leq (\|B_0^{-1}\| \|B_0 - B_i\|)^k \|\varepsilon_i\|.$$

Protože B závisí na u spojitě, bude při malém kroku s_i i rozdíl $B_0 - B_i$ malý. Poznamenejme, že pro $i = 7$ (variace teploty T_0) je dokonce $B_7 = B_0$ a tedy

$$\varepsilon_7 = B_0^{-1} f_7 - x_0.$$

Tento způsob výpočtu má tu výhodu, že pro numerický výpočet gradientu v jednom bodě stačí spočítat pouze jednu dekompozici matice B_0 , která je značně časově náročná zejména pro větší úkoly. Výpočetní složitost ostatních složek výpočtu - transformování triangulace, výpočet matic a tuhosti, atd. - roste pouze lineárně s rozměrem úlohy. Matice B je blokově trojúhelníková se symetrickými diagonálními bloky (= matice tuhosti pro teplotu a elasticitu) a pro její dekompozici je tedy nutno volat 2x podprogram MCHB.

1.5 Implementační poznámky

Program byl odladěn na počítačích EC 1040 (VC UK) a EC 1045 (SVT ČSAV). Program potřebuje 398 Kbyte (přeloženo překladačem Fortran - B), ale pro náš modelový příklad by bylo možno zmenšit prostor pro matice vodivosti a tuhosti (celý program by pak nevyžadoval více než 300 Kbyte). Všechny datové struktury jsou zobrazeny v operační paměti a nebyla použita technika překrývání pro program. Spotřeba času základní jednotky EC 1045 pro modelový příklad : podprogram TRIANG (=sestavení triangulace) potřeboval při prvním vyvdání 43 s, při dalších 0,1 s. Výpočet jedné funkční hodnoty cenového funkcionálu trval 12 - 13 s, tedy výpočet gradientu cenového funkcionálu (numericky) trval řádově 100 s. Na výpočet podle tabulky 1 bylo potřeba přibližně 15 min. (přitom v optimalizačním algoritmu nebylo nikdy potřeba rozpůlit délku kroku). Omezení programu a kde je nutno udělat úpravy při jejich překročení:

- a) počet uzlů ≤ 300 , počet elementů ≤ 500 (COMMON "OPT" v hl. programu a v podprogramu F, proměnná MELEM v hl. programu a pole FE, FT, BE v podprogramu TE). TRIANG, GRID a SEZNAL mají omezení počet uzlů ≤ 400 , počet elementů ≤ 600 (pole XR, YR, W v TRIANG, pole XEE, YEE v GRID, pole IA, IP, IPL v SEZNAL a pole v jeho podřízených podprogramech).
- b) počet uzlů nebo hran v okrajových podmínkách ≤ 50 (podprogram F), počet hran na $\Gamma_2 \leq 10$ (COMMON "OPT")
- c) matice vodivosti $\leq 10^4$ a tuhosti $\leq 4 \cdot 10^4$ (podprogram TE), ukládá se však jen polovina matice a nenulové diagonály, tedy potřebný prostor závisí na šířce pásu těchto matic.
- d) řádková tiskárna s alespoň 128 znaky/řádek (podprogram LSTG)

Stručný popis nejdůležitějších částí programu:

Hlavní program: Optimalizační algoritmus, kreslení sítě na tiskárně nebo výstup dat pro kreslení na kreslicím zařízení fy. Hewlett-Packard.

Volá: F, LSTG

F: Podprogram (funkce) pro výpočet hodnoty cenového funkcionálu.

Volá: TRIANG, TE

TE: Podprogram realizující výpočty z odst. 1.2 a 1.3.

Volá: MCHB (podprogram knihovny SSP pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic).

TRIANG: Generování pohyblivé triangulace

Volá: GRID - triangulace referenční oblasti

SEZNAØ - lexikografické očíslování uzlů

SEZNA1 - optimalizace očíslování uzlů

LISTB } - tisk uzlů s okrajovými podmínkami
LISTU }

LSTG

LSTG: kreslení sítě na tiskárně.

Srovnání označení v této zprávě s označením užitým v programu (hl. program + podprogramy F, TE):

u	...	(vektor návrhových proměnných)	...	U
$\bar{u}_0$	...			$U(7)$
σ	...			FT
a	...			HC
α	...			ALPHA
γ	...			FLUX
$\bar{u}_{0,0,0,1}$	...			T
$u = (u_1, u_2)$	(posunutí)	...		FE

E YOUNG
 σ POISS
 τ_{red} HMH
 α_z ALPHAT
 $\mathcal{D}_d$ FPEN
 k (konstanta v cenovém funkcionálu)..PEN
 c^k STEP
 m_i S(I)
 s_i SØ(I)
 u_i^{max} UMAX(I)
 u_i^{min} UMIN(I)
 e_z EZ
 τ_z SZ

1.6 Popis vstupních dat

Data na obr. 1.3 byla pro přehlednost rozdělena do 7 odstavců.

1. Zadání koeficientů úlohy NAMELIST DD. Čte se v MAIN.

2 - 5 : data pro GRID

2. 9=počet podoblastí, 42=počet dělicích bodů. Formát 2I3.

3. Souřadnice dělicích bodů, nejdříve x , pak y .

Srov. obr. 1.1. Formát 8F10.5.

4. Tzv. connectivity data. Pro každou podoblast jeden štítek, který udává s kterými podoblastmi sousedí. Např. 2 sousedí hranou 1 s podoblastí 3, hranou 2 s 5 a hranou 3 s 1. Hrany se číslují od spodní proti směru hodinových ručiček. Formát 4I3.

5. Data podoblastí. Řádek obsahuje:

číslo podoblasti, počet řádků (=dělení), počet sloupců, čísla
8
9 dělicích bodů, které podoblast definují, od hrany 1 proti směru hodinových ručiček. Podoblast musí být čtyřúhelník, dělicí body uvnitř stran zadávají jen případné nerovnoměrné dělení.

6. Okrajové body oblasti Ω_u , srov. obr. 1.2. Formát 10X, 2F10.5. Čte se v TRIANG.

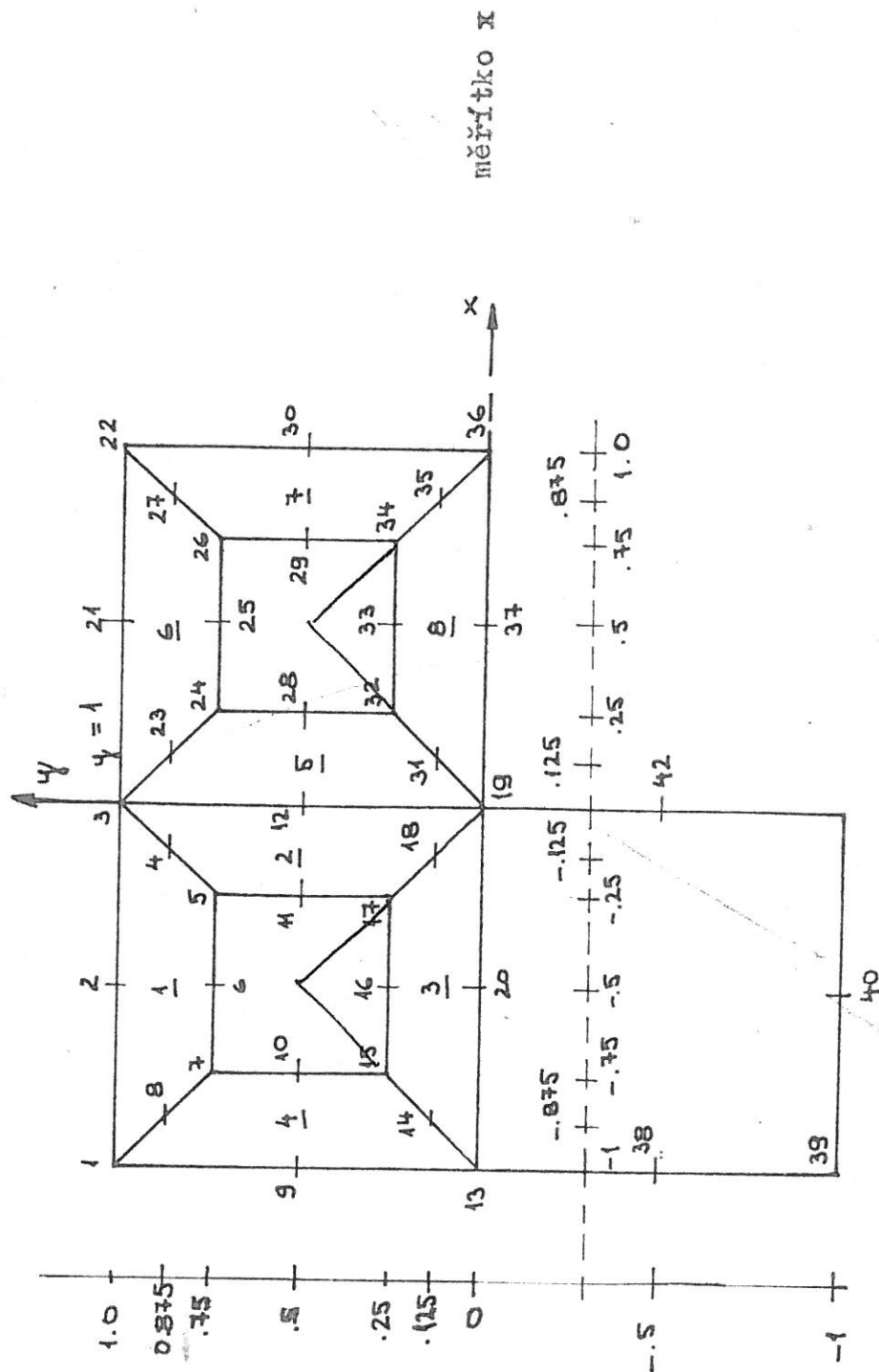
7. NOPTIM - počet kroků optimalizace očíslování uzlů. Formát I2, čte se v TRIANG,

k	u_1^k	u_2^k	u_3^k	u_4^k	u_5^k	u_6^k	u_7^k	c^{k-1}	$J(u^k)$	J_1	J_2
-	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[°C]	-	[MPa] m^2	[K]	[MPa]
0	0,1500	0,1500	0,03000	0,4000	0,2000	0,03000	20,00	-20,00	50527	82,29	627,4
1	0,1500	0,1501	0,02991	0,4011	0,1959	0,03569	6,91	-20,17	33757	98,75	610,5
2	0,1486	0,1520	0,02640	0,4035	0,1941	0,03750	24,32	-61,87	26340	78,12	605,8
3	0,1482	0,1525	0,02532	0,4047	0,1914	0,04088	23,07	-33,48	22956	83,12	592,1
4	0,1476	0,1533	0,02372	0,4058	0,1915	0,04045	35,21	-34,24	20084	67,69	594,8
5	0,1473	0,1537	0,02291	0,4067	0,1892	0,04319	34,09	-31,86	17736	72,23	582,1
6	0,1469	0,1543	0,02169	0,4077	0,1893	0,04277	44,16	-33,42	15758	59,59	584,4
7	0,1467	0,1547	0,02100	0,4085	0,1873	0,04500	43,45	-31,24	14076	63,19	573,1

Tab. 1.1 : Prvních 7 iterací při optimalizaci modelového příkladu.

Legenda $u_i^k, i = 1, \dots, 7$ c^k je délka kroku, J je cenový funkcionál, $J_1 = \| \sigma - \sigma_d \|_{L^\infty(\Gamma_2)}$ $J_2 = \| \tau_{rad} \|_{L^\infty(\Omega)}$ jsou návrhové proměnné při k -té iteraci,

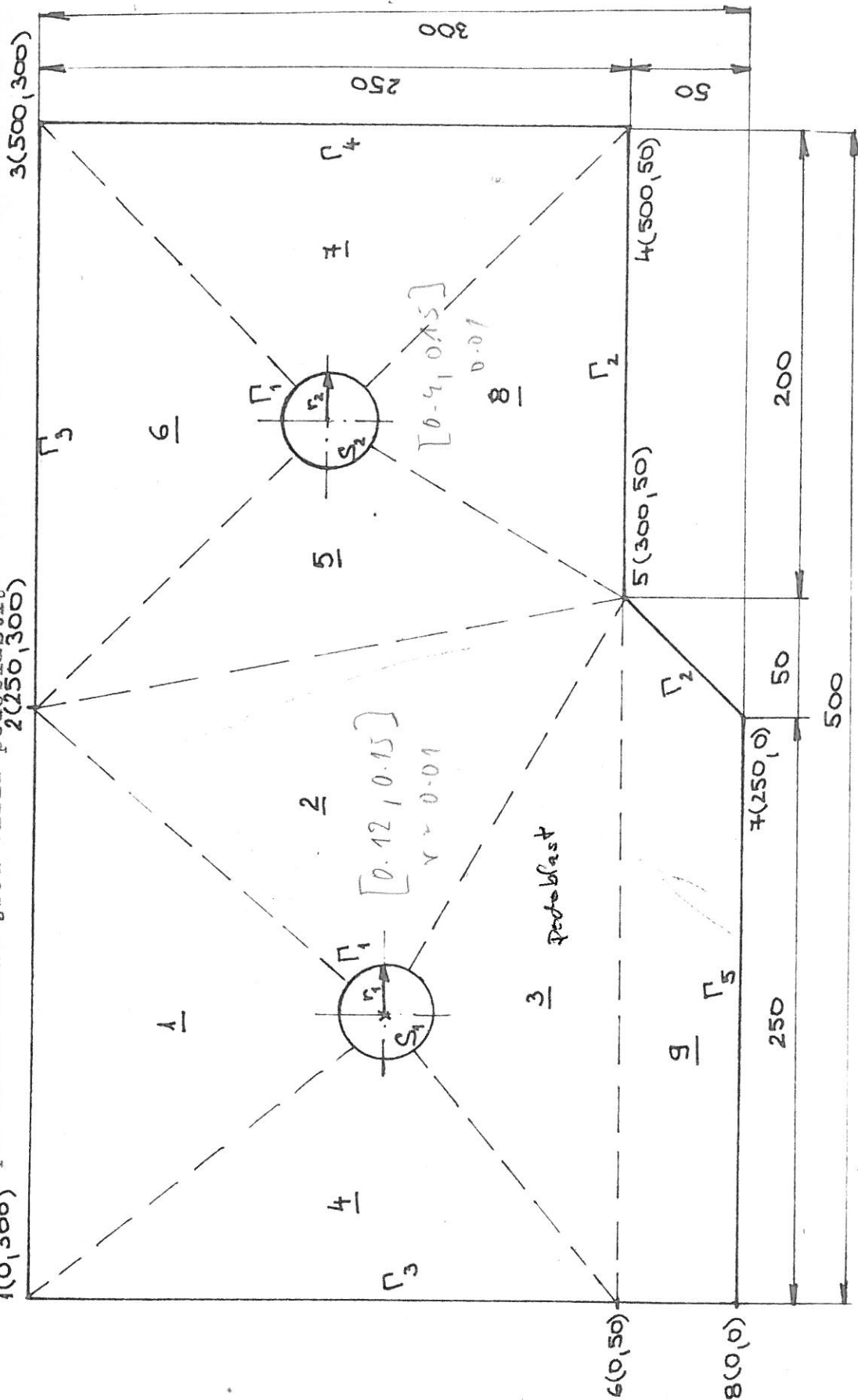
měřítko y



Obr. 1.1. Referenční obl. $\hat{\Omega}$.

Dělicí body a podoblasti (podtrženo) pro generování referenční triangulace programem GRID.

Obr. 1.2. Oblast Ω_u . Rozměry a souřadnice pohyblivé oblasti. Číslo bodů jsou podle číslování v programu (různá od číslování zadávacích bodů referenční triangulace).
podtržená čísla jsou čísla podoblastí.



Obr. 1.3 - část 1.

1.

ADD MODE=2,U=.15,.15,.03,.40,.20,.03,20.,

S=6*1.E-10,1.E-3,30=2*5.E-5,*5.E-5,2.E-5,10.E-2,STEP=-20.,

2.

FLUX=10*1.3E+5,IWRT=1,T=20.,TPLN=380.,IT=1,FEN=50.,END

9 42 213

3.

8F 1615

-1.	-.5	0.	-.125	-.25	-.5	-.75	-.875
-1.	-.75	-.25	0.	-1.	-.875	-.75	-.5
-.25	-.125	0.	-.5	.5	1.	.125	.25
.5	.75	.875	.25	.75	1.	.125	.25
.5	.75	.875	1.	.5	-1.	1.	-.5
0.	0.						
1.	1.	1.	.875	.75	.75	.75	.875
.5	.5	.5	.5	0.	.125	.25	.25
.25	.125	0	0	1.	1.	.875	.75
.75	.75	.875	.5	.5	.5	.125	.25
.25	.25	.125	0.	0.	-.5	-1.	--1.
-1.	-.5						

4.

413

0	2	0	4	: 1
3	5	1	0	: 2
9	2	0	4	: 3
3	0	1	0	: 4
8	0	6	2	: 5
0	7	0	5	: 6
8	0	6	0	: 7
0	7	0	5	: 8
0	0	3	0	: 9

5.

1	5	4	7	6	5	4	3	2	1	8
2	5	5	17	18	19	12	3	4	5	11
3	5	5	13	20	19	18	17	16	15	14
4	5	5	13	14	15	10	7	8	1	9

5	5	5	19	31	32	20	24	23	3	12
6	5	5	24	25	26	27	22	21	3	23
7	5	5	34	35	36	30	22	27	26	29
8	5	7	19	37	36	35	34	33	32	31
9	3	5	39	40	41	42	19	20	13	38

6.

1	0.	.3
2	.25	.3
3	.5	.3
4	.5	.05
5	.3	.05
6	.0	.05
7	.25	.0
8	.0	.0

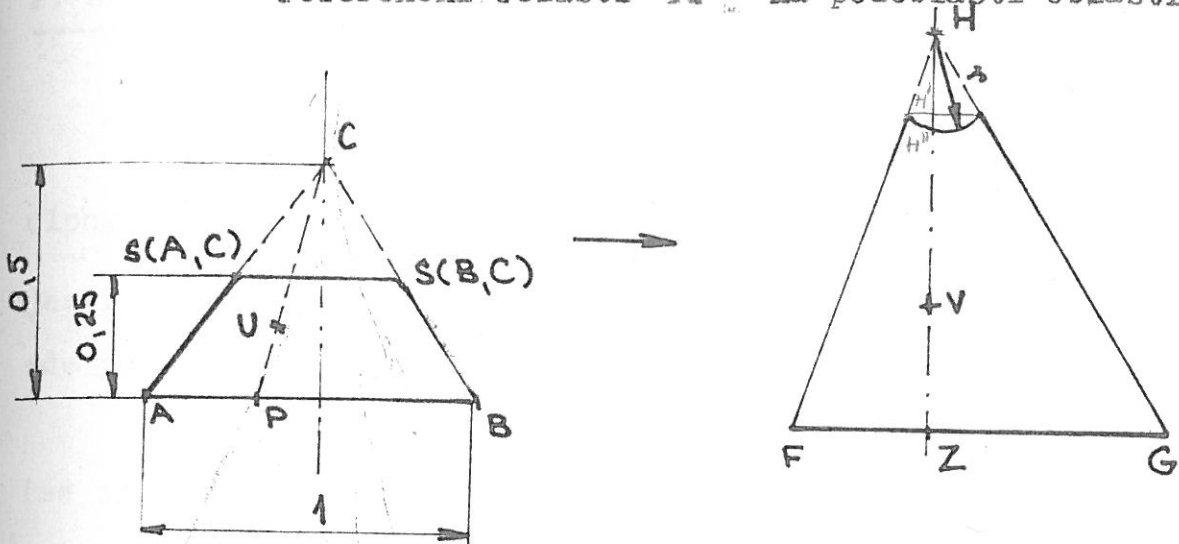
10X, 2 F10-5

7.

02 Počet optimalizačních kroků I 2
/x Vstupní data

Podtržená čísla jsou čísla odstavců, příslušné řádky nejsou v datech obsaženy.

Obr. 1.4. Transformace podoblastí 1 až 8 referenční oblasti $\hat{\Omega}$ na podoblasti oblasti Ω_u .



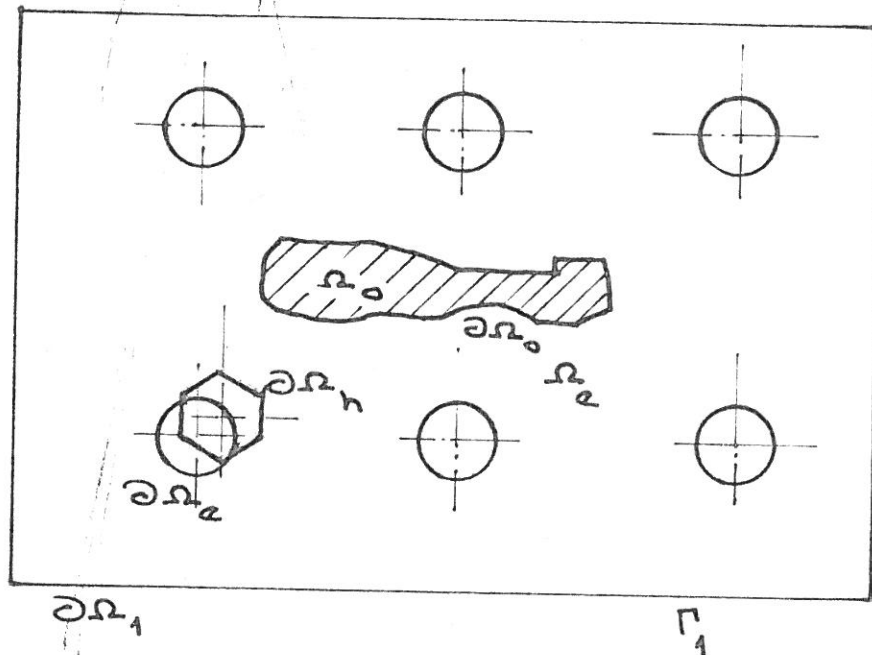
$AB \rightarrow FG$ lineárně, $C \rightarrow H$ $U \rightarrow V$

$$P = C + t_1(U - C), \quad \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 2$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{FZ}{GZ}$$

$$V = H + t_2(Z - H), \quad t_2 = \left(\frac{r}{Z - H} \right)^{2 - \frac{2}{t}}$$

Obr. 2.1.



2. Analýza konvergence přibližných řešení optimalizační úlohy

Cílem této kapitoly je vyšetřit, zda-li řešení přibližné úlohy konvergují k řešení původního optimalizačního problému, jestliže se zjemňuje parametr triangulace k nule. Uvažují se zde pouze "přímé" trojúhelníkové prvky a lineární polynomy.

Dokážeme, že z každé posloupnosti řešení přibližné úlohy (se zjemňující se triangulací) lze vybrat podposloupnost konvergující k řešení původního problému optimalizace. Rovněž ukážeme, že i přibližná řešení stavových problémů při tom konvergují k řešení stavové úlohy na "limitní" oblasti.

Zopakujeme nejprve zadanou optimalizační úlohu (srov. /1/).

Stavový problém:

1. část: najít funkci $v \in V(\Omega_\varepsilon)$,

$$V(\Omega_\varepsilon) = \{v = H^1(\Omega_\varepsilon) : v = 0 \text{ na } \Gamma_\varepsilon\}$$

takovou, že

$$v - v_0 \in V(\Omega_\varepsilon),$$

$$(2.1) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \alpha v w \, ds = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g w \, ds \quad \forall w \in V(\Omega_\varepsilon)$$

Zde $a = \text{konst} > 0$, $\alpha = \text{konst} \geq 0$, $v_0 = \text{konst}$, $g \in L^2(\partial\Omega_0)$ jsou dané funkce, oblast Ω_ε má hranici

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \Gamma_\varepsilon,$$

kde Γ_ε tvoří kružnice s poloměry ϱ_k a středy J_k ,

$k = 1, \dots, N_0$ (viz obr. 2.1), $\partial\Omega_1$ je "vnější" obdélník a $\partial\Omega_0$ je vnitřní hranice. $\partial\Omega_0$ ani $\partial\Omega_1$ na návrhových parametrech $\alpha \equiv \{\varrho_k, J_k\}_{k=1}^{N_0}$ nezávisí, $\partial\Omega_0$ je polygonální.

2. Část stavové úlohy:

$$V_p(\Omega_\varepsilon) = \left\{ u \in [H^1(\Omega_\varepsilon)]^2 : \int_{\Gamma_1} u \, ds = 0, \right. \\ \left. \int_{\Gamma_1} (x_1 u_2 - x_2 u_1) \, ds = 0 \right\},$$

kde $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_\varepsilon$ je pevná úsečka, nezávislá na ε .

Hledáme funkci $u \in V_p(\Omega_\varepsilon)$ takovou, že

$$(2.2) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} (\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)) \, dx = \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} k_0 \bar{\sigma} \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in V_p(\Omega_\varepsilon).$$

Zde $\lambda \geq 0, \mu > 0, k_0 > 0$ jsou dané konstanty, sčítáme přes opakované indexy v rozmezí 1, 2 a $\bar{\sigma}$ je řešení rovnice 2.1)

Účelový funkcional:

$j(\varepsilon, u(\varepsilon)) = (\operatorname{mes} \Omega_\varepsilon)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} I^2(\tau) \, dx, \quad (\tau = \tau(u(\varepsilon)))$
kde $I^2(\tau)$ je čtverec intenzity smykových napětí, tj. homogenní kvadratická forma ve složkách tenzoru deformace (viz /1/ - Část 1., vzorec (14)).

Množina přípustných návrhových parametrů $U_{ad} \subset \mathbb{R}^{3N_0}$ je definována např. v /1/ část 1. - (19), (20).

Úloha optimalizace:

najít $\varepsilon \in U_{ad}$ takové, že

$$(2.3) \quad j(\varepsilon, u(\varepsilon)) \leq j(\eta, u(\eta)) \quad \forall \eta \in U_{ad},$$

přičemž $u(a)$, resp. $u(\eta)$ značí řešení úlohy (2.2) na oblasti Ω_a , resp. Ω_η .

Dále připomeneme definici přibližné úlohy optimalizace (viz /1/ část 2., (45), (46)).

Budeme uvažovat pouze triangulace složené z "přímých" trojúhelníků. Zavedeme pohyblivé sítě uzlů jako v /1/ - část 1, kapitole 2.2, závislé jen na parametrech $a \in U_{ad}$.

Příslušné triangulace budeme značit $\mathcal{T}_h(a)$ a sjednocení všech trojúhelníků z $\mathcal{T}_h(a)$ bude

$$\Omega_h \equiv \Omega_h(a), a \in U_{ad},$$

přičemž

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h(a)} (\text{diam } T).$$

Dále budeme značit prostor konečných prvků

$$H_h(\Omega_h) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) : v_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(a)\},$$

$$V_h(\Omega_h) = H_h(\Omega_h) \cap V(\Omega_h),$$

$$V_{ph}(\Omega_h) = \{u \in [H_h(\Omega_h)]^2 : \int_{\Gamma_1} u \, ds = 0,$$

$$\int_{\Gamma_1} (x_1 u_2 - x_2 u_1) \, ds = 0\}.$$

Přibližná stavová úloha:

1. část: najít $t_h \in V_h(\Omega_h)$ takovou, že

$$(2.4) \quad \int_{\Omega_h} a \nabla t_h \cdot \nabla w_h dx + \alpha \int_{\partial \Omega_1} t_h w_h ds = \\ = \int_{\partial \Omega_0} q w ds - \int_{\partial \Omega_1} \alpha \tilde{\sigma}_0 w ds \quad \forall w_h \in V_h.$$

2. část: najít $u_h \in V_{ph}(\Omega_h)$ takovou, že

$$(2.5) \quad \int_{\Omega_h} (\lambda \operatorname{div} u_h \operatorname{div} v_h + 2\mu \varepsilon_{ij}(u_h) \varepsilon_{ij}(v_h)) dx = \\ = \int_{\Omega_h} k_0 (\tilde{\sigma}_0 + t_h) \operatorname{div} v_h dx \quad \forall v_h \in V_{ph}(\Omega_h)$$

kde t_h je řešení (2.4).

Přibližná úloha optimalizace:

najít $a \in U_{ad}$, pro které je

$$(2.6) \quad j_h(a, u_h(a)) \leq j_h(\eta, u_h(\eta)) \quad \forall \eta \in U_{ad},$$

kde

$$j_h(a, u_h(a)) = (\operatorname{mes} \Omega_h)^{-1} \int_{\Omega_h} I^2(\tau(u_h(a))) dx;$$

a podobně je definován $j_h(\eta, u_h(\eta))$.

Ve zprávě /1/ část II. jsme dokázali existenci řešení úlohy optimalizace (2.3) i přibližné úlohy optimalizace (2.6) při použití čtyřúhelníkových křivočarých isoparametrických prvků s "téměř" bikvadratickými polynomy na referenčním čtverci.

V případě, který uvažujeme zde, lze existenci řešení přibližné úlohy dokázat stejným způsobem, přičemž se úvahy ještě technicky velmi zjednoduší.

Abychom vyšetřili konvergenci řešení přibližné úlohy, budeme potřebovat několik pomocných lemat o konvergenci řešení přibližné stavové úlohy za předpokladu, že budeme zjemňovat triangulace $\mathcal{T}_h$.

Lemma 2.1. Existuje konstanta $C > 0$ nezávislá na ε a h taková, že pro všechna $\varepsilon \in U_{ad}$ platí:

$$\|u\|_{1, \Omega_h(\varepsilon)} \leq C \|u\|_{1, \Omega_h(\varepsilon)} \quad \forall u \in V(\Omega_h(\varepsilon)),$$

Důkaz. Rozdělme $\Omega_h(\varepsilon)$ na N_0 disjunktních podoblastí

$\Omega_{hm}, m = 1, \dots, N_0$, z nichž každá obsahuje právě jeden otvor.

Uvažujme libovolnou z oblastí Ω_{hm} a umístíme polární souřadnice počátkem do středu $S^{(m)}$ aproximovaného kruhu K_{hm} . Pak můžeme psát

$$\Omega_{hm}(\varepsilon) = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi < 2\pi, g_{hm}(\varphi) \leq r \leq R_m(\varphi)\},$$

$$\int_{\Omega_{hm}} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{g_{hm}}^{R_m} (u_r^2 + r^{-2} u_\varphi^2) r dr,$$

kde indexy r, φ značí parciální derivace.

Nechť $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_h(\varepsilon)) \cap V(\Omega_h(\varepsilon))$.

Pak máme

$$u(r_1, \varphi_1) = \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{r_1} u_r(r, \varphi_1) dr,$$

$$u^2(r_1, \varphi_1) \leq (r_1 - g_{hm}(\varphi_1)) \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{r_1} u_r^2 dr \leq R_0 \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} u_r^2(r, \varphi_1) dr,$$

kde

$$R_0 = \max_{m, e} (\max_{\varphi} R_m(\varphi)) \leq \max_{\substack{m \leq N_0 \\ e \in U_{ad}}} (\text{diam } \Omega_{hm}(e)) < \infty$$

Integrací dostaneme

$$(2.7) \quad \|u\|_{0, \Omega_{hm}(e)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} u^2(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 \leq$$

$$\leq R_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} r_1 \left(\int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} u_r^2(r, \varphi_1) dr \right) dr_1 \leq$$

$$\leq R_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \frac{1}{2} (R_0^2 - g_{hm}^2(\varphi_1)) \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} u_r^2(r, \varphi_1) dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} R_0^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{g_{hm}(\varphi_1)}^{R_m(\varphi_1)} u_r^2(r, \varphi_1) \frac{2r}{g_{\min}} dr \leq R_0^3 g_{\min}^{-1} \|u\|_{1, \Omega_{hm}}^2$$

neboť pro všechna $h \leq h_0, a \in U_{ad}$ je možno odhadnout

$$g_{hm}(\varphi_1) \geq \frac{1}{2} g_{\min}$$

tedy

$$2r/g_{\min} \geq 1.$$

Přičteme-li na obou stranách (2.7) čtverec seminormy, odvodíme

$$\|u\|_{1, \Omega_{hm}(a)}^2 \leq (1 + R_0^3 g_{\min}^{-1}) |u|_{1, \Omega_{hm}(a)}^2$$

Sečteme tyto nerovnosti pro $m = 1, 2, \dots, N_0$. Z hustoty množiny hladkých funkcí v prostoru $V(\Omega_h(a))$ plyne tvrzení lemmatu, přičemž

$$C = (1 + R_0^3 g_{\min}^{-1})^{1/2}. \quad \text{C.B.D.}$$

Lemma 2.2. Nechť je dána posloupnost $\{a(h)\}$, $h \rightarrow 0$,

$a(h) \in U_{ad}$ taková, že

$$(2.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} a(h) = a$$

(tj. konverguje v $\mathbb{R}^{3N_0}$). Uvažujme regulární (Regulární

systém triangulací je takový, pro který existuje konstanta

$\vartheta_0 > 0$ taková, že žádný z vnitřních úhlů ze systému není menší než ϑ_0 . Regulární systém dostaneme např. "půlením",

tzn. pro posloupnost $h_n = h_0 \cdot 2^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

tím, že "nové" uzly v triangulaci $\mathcal{T}_{h_{n+1}}$ odpovídají

středům stran triangulace $\mathcal{T}_{h_n}$) posloupnost triangulací

$\{\mathcal{T}_h(\Omega_h)\}$, kde $\Omega_h \equiv \Omega_h(a(h))$ a přibližných řešení t_h rovnice (2.4) na Ω_h .

Pak platí

$$(2.9) \quad \tilde{t}_h \rightarrow \tilde{t}(a) \quad (\text{slabě}) \text{ v } H^1(\mathcal{O}),$$

kde $\sigma = \Omega_1 \cup \Omega_0$ a $\tilde{t}_h$ resp. $\tilde{t}(\sigma)$ je prodloužení funkce t_h resp. $t(\sigma)$ nulou na $\sigma - \Omega_h$ resp. $\sigma - \Omega_0$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje konstanta C_1 nezávislá na h a taková, že

$$(2.10) \quad \|\tilde{t}_h\|_{1,\sigma} \leq C \quad \forall h \leq h_0.$$

Vskutku, podle definice t_h platí (2.4). Dosadíme-li za w_h funkci t_h , uijeme Lemmatu 2.1 a nerovností $\alpha \geq 0$ na $\partial\Omega_1$, $\alpha > 0$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \|\tilde{t}_h\|_{1,\sigma}^2 &= \|t_h\|_{1,\Omega_h}^2 \leq C_1 \|t_h\|_{1,\Omega_h}^2 \leq C_1 \alpha^{-1} \int_{\Omega_h} |\nabla t_h|^2 dx \leq \\ &= C_1 \alpha^{-1} (\|g\|_{\sigma,\partial\Omega_0} \|t_h\|_{0,\partial\Omega_0} + C_2 \|t_h\|_{0,\partial\Omega_1}) \leq \\ &= C_3 \|\tilde{t}_h\|_{0,\partial\sigma} = C_4 \|\tilde{t}_h\|_{1,\sigma}. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost (2.10)

Existuje tedy podposloupnost (kterou budeme značit stejným symbolem) a funkce $\tilde{t} \in H^1(\sigma)$ takové, že

$$(2.11) \quad \tilde{t}_h \rightharpoonup \tilde{t} \quad (\text{slabě}) \quad \text{v} \quad H^1(\sigma).$$

Ukážeme, že platí

$$(2.12) \quad \tilde{t} = 0 \quad \text{v} \quad \sigma - \Omega_0.$$

Důkaz provedem sporem. Nechť tedy $\tilde{t} \neq 0$ na množině $E \subset \sigma - \Omega_\epsilon$,
přičemž $\text{mes } E > 0$. Označme $K_{k\epsilon}$ kruh o středu $S^{(k)}$
s poloměrem $\rho_k - \epsilon$. Definujeme oblast

$$\Omega_\epsilon = \sigma - \bigcup_{k=1}^{N_0} \bar{K}_{k\epsilon}.$$

Zřejmě existuje $h_0(\epsilon)$ takové, že pro $h < h_0(\epsilon)$ je

$$(2.13) \quad \bar{\Omega}_h \subset \Omega_\epsilon.$$

Tedy uvnitř kruhů $K_{k\epsilon}$, $k=1, \dots, N_0$, platí

$$(2.14) \quad \tilde{t}_h = 0.$$

Existuje dostatečně malé $\epsilon > 0$ takové, že

$$\text{mes} [(\sigma - \Omega_\epsilon) \cap E] > 0.$$

Pak můžeme v důsledku (2.14) psát pro $h < h_0(\epsilon)$

$$(2.15) \quad \int_{\sigma} (\tilde{t}_h - \tilde{t})^2 dx \geq \int_{E \cap (\sigma - \Omega_\epsilon)} (\tilde{t}_h - \tilde{t})^2 dx = \int_{E \cap (\sigma - \Omega_\epsilon)} (\tilde{t})^2 dx > 0.$$

Na druhé straně však z konvergence (2.11) a z Rellichovy
věty (o totální spojitosti vnoření $H^1(\sigma) \hookrightarrow L^2(\sigma)$).

plyne $\tilde{t}_h \rightarrow \tilde{t}$ v $L^2(\sigma)$,

což je spor s (2.15). Tedy platí (2.12).

Definujme-li nyní funkci t jako restrikti

$$t = \tilde{t}|_{\Omega_\epsilon},$$

pak je nutně $t \in V(\Omega_\epsilon)$.

Ukážeme dále, že $\tilde{\sigma}_0 + t$ splňuje stavovou rovnici (2.1),
tj. $t = t(\epsilon)$. Nechť $w \in V(\Omega_\epsilon)$ je libovolná testovací

funkce. Existuje posloupnost $\{w_n\}$, $n \rightarrow \infty$, $w_n \in C^\infty(\bar{\Omega}_\epsilon) \cap V(\Omega_\epsilon)$

taková, že $\text{supp } w_n \cap \bigcup_{k=1}^{N_0} K_k = \emptyset$, $k=1, \dots, N_0$

(kde K_k jsou vnitřní kruhy v oblasti Ω_a), a

$$(2.15') \quad w_\alpha \rightarrow w \quad \text{v } H^1(\Omega_a) \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0.$$

Uvažujme pevné w_α , prodlužme je nulou je nulou na $\partial\Omega_a$, takže vznikne funkce $\tilde{w}_\alpha$. Jelikož

$$\text{supp. } \tilde{w}_\alpha \subset \Omega_h$$

pro dostatečně malá h , máme $\tilde{w}_\alpha \in V(\Omega_h)$ pro $h < h_0$.

Nechť $\tilde{w}_{\alpha h} \in H_h(\Omega_h)$ je interpolace funkce $\tilde{w}_\alpha$ na triangulaci $\mathcal{T}_h(a(h))$. Je známo, že platí

$$(2.16) \quad \|\tilde{w}_{\alpha h} - \tilde{w}_\alpha\|_{1,\Omega_h} \leq Ch \|\tilde{w}_\alpha\|_{2,\Omega_h} = Ch \|\tilde{w}_\alpha\|_{2,\sigma},$$

protože systém triangulací $\{\mathcal{T}_h(a(h))\}$, $h \rightarrow 0$, je regulární. Zřejmě je i $\tilde{w}_{\alpha h} \in V_h$, tedy můžeme dosadit do rovnice (2.4) a dostaneme

$$(2.17) \quad \int_{\Omega_h} a \nabla \tilde{t}_h \cdot \nabla \tilde{w}_{\alpha h} \, dx + \int_{\partial\Omega_1} a \tilde{t}_h \tilde{w}_{\alpha h} \, ds = \\ = \int_{\partial\Omega_0} q \tilde{w}_{\alpha h} \, ds - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{v}_0 \tilde{w}_{\alpha h} \, ds.$$

Při limitním přechodu $h \rightarrow 0$ využijeme (2.11) a (2.16), takže vychází

$$\int_{\Omega_h} a \nabla \tilde{t}_h \cdot \nabla \tilde{w}_{\alpha h} \, dx = \int_{\sigma} a \nabla \tilde{t}_h \cdot \nabla \tilde{w}_{\alpha h} \, dx \rightarrow \int_{\sigma} a \nabla \tilde{t} \cdot \nabla \tilde{w}_\alpha \, dx = \\ = \int_{\Omega_a} a \nabla \tilde{t} \cdot \nabla w_\alpha \, dx, \\ \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t}_h \tilde{w}_{\alpha h} \, ds \rightarrow \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t} \tilde{w}_\alpha \, ds = \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t} w_\alpha \, ds.$$

(Zde můžeme využít např. toho, že zobrazení "stop"

$$\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \quad \text{je totálně spojitý.}$$

Limita pravé strany (2.17) je zřejmě

$$\int_{\partial\Omega_0} q w_\alpha ds - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{v}_0 w_\alpha ds.$$

Máme tedy v limitě rovnici

$$\int_{\Omega_\alpha} \alpha \nabla \tilde{t} \cdot \nabla w_\alpha dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t} w_\alpha ds = \int_{\partial\Omega_0} q w_\alpha ds - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{v}_0 w_\alpha ds.$$

Konečně přejdeme k limitě s $\alpha \rightarrow 0$ a užijeme (2.15').

Dostaneme v limitě

$$\int_{\Omega_\alpha} \alpha \nabla \tilde{t} \cdot \nabla w dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t} w ds = \int_{\partial\Omega_0} q w ds - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{v}_0 w ds.$$

Tedy funkce $\tilde{t}$ splňuje stavovou rovnici a můžeme psát

$\tilde{t} = \tilde{t}(\alpha)$. Protože tato rovnice má jediné řešení, plyne
odtud, že celá posloupnost $\{\tilde{t}_h\}$ konverguje slabě v $H^1(\Omega)$
k funkci $\tilde{t} = \tilde{t}(\alpha)$.

Lemma 2.3. Nechť je dána posloupnost $\{\alpha(h)\}$, $h \rightarrow 0$
stejná jako v předpokladech lemmatu 2. Uvažujme opět regulární
posloupnost triangulací $\{\mathcal{T}_h(\Omega_h)\}$, kde $\Omega_h \equiv \Omega_h(\alpha(h))$
a přibližných řešení u_h druhé stavové rovnice (2.5),
přičemž na pravé straně dosazujeme přibližné řešení $\tilde{t}_h$ rovnice (2.4).

Definujme oblasti

$$G_m = \{x \in \Omega_\alpha : |x - s^{(k)}| > \rho_k + \frac{1}{m}, \quad k = 1, \dots, N_0\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Potom existuje funkce $u \in V_p(\Omega_\alpha)$ taková, že

$$u_h|_{G_m} \rightharpoonup u|_{G_m} \quad (\text{slabě}) \quad \text{v } [H^1(G_m)]^2$$

pro všechna dostatečně velká m a $h \rightarrow 0$. Tato funkce je ře-
šením druhé stavové rovnice (2.2) na Ω_α , tj. $u = u(\alpha)$.

Důkaz. Dosadíme-li do (2.5) za testovací funkci $v_h = u_h$, dostaneme

$$\begin{aligned} 2\mu_0 |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h}^2 &= \int_{\Omega_h} \tilde{\tau}_{ij}(u_h) \varepsilon_{ij}(u_h) dx = \\ &= \int_{\Omega_h} k_0 (\tilde{\nu}_0 + \tilde{t}_h) \operatorname{div} u_h dx \leq \\ &\leq C (\|\tilde{\nu}_0\|_{0,\sigma} + \|\tilde{t}_h\|_{0,\sigma}) \|\varepsilon_{11}(u_h) + \varepsilon_{22}(u_h)\|_{0,\Omega_h}, \end{aligned}$$

kde jsme použili označení

$$|u_h|_{\varepsilon, \Omega_h}^2 = \int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^2(u_h) dx.$$

Na základě odhadu (2.10) odvodíme odtud, že platí

$$2\mu_0 |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h}^2 \leq C_1 |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h},$$

tedy

$$(2.18) \quad |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \leq C_2 \quad \forall h \leq h_1.$$

Pro dostatečně malé $h_0(m)$ a $h < h_0(m)$ zřejmě platí $\Omega_h \supset \overline{G_m}$.

Potom

$$(2.19) \quad |u_h|_{\varepsilon, G_m} \leq |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \leq C_2 \quad \forall h < h_1(m).$$

Existuje konstanta $C_1(m)$ taková, že platí nerovnost Kornova typu (viz např. /2/)

$$(2.20) \quad |u_h|_{\varepsilon, G_m} \geq C_1(m) \|u_h\|_{1, G_m}.$$

Vskutku, protože $u_h \in V_p(\Omega_h)$, také restrikce $u_h|_{G_m} \in V_p(G_m)$.

Z (2.19), (2.20) vyplývá, že

$$(2.21) \quad \|u_h\|_{1, G_m} \leq \frac{C_2}{C_1(m)} \quad \forall h < h_1(m).$$

Protože $V_p(G_m)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje prvek $u^{(m)} \in [H^1(G_m)]^2$ a podposloupnost $\{u_{h_i}\}$ taková, že pro $h_i \rightarrow 0$ platí

$$(2.22) \quad u_{h_i}|_{G_m} \rightharpoonup u^{(m)} \quad (\text{slabě}) \quad \text{v} \quad [H^1(G_m)]^2.$$

Pro oblast G_{m+1} dostaneme analogické tvrzení, jestliže vybereme vhodnou podposloupnost $\{u_{h_2}\}$ z posloupnosti $\{u_{h_i}\}$ atd. Uvažujme nyní diagonální podposloupnost $\{u_{h_0}\}$ všech posloupností $\{u_{h_1}\}, \{u_{h_2}\}, \dots$.

Existuje funkce $u \in V_p(\Omega_2)$ taková, že

$$(2.23) \quad u_{h_0} \rightharpoonup u|_{G_m} \quad (\text{slabě}) \quad \text{v} \quad [H^1(G_m)]^2 \quad \forall m.$$

Vskutku, abychom toto tvrzení dokázali, uvědomíme si nejprve, že existence zobecněných derivací $\partial u_i / \partial x_j$ plyne z definice; dále je

$$(2.24) \quad |u^{(m)}|_{\varepsilon, G_m} \leq C_2 \quad \forall m,$$

neboť množina $M_m = \{v \in [H^1(G_m)]^2 : |v|_{E, G_m} \leq C_2\}$

je slabě uzavřená a platí (2.19), (2.22).

Konečně můžeme dokázat, že pro všechna přirozená čísla m, k platí na G_m skoro všude

$$(2.25) \quad u^{(m)} = u^{(m+k)}|_{G_m}.$$

Vskutku, nechť pro dvojici $\{m, k\}$ právě na množině $E \subset G_m$, $\text{mes } E > 0$. posloupnosti hodnot funkcí

neplatí (2.25)

Uvažujme dvě

$$\langle \varphi, u_{h_0} \rangle_r = \int_{G_r} \varphi \cdot u_{h_0} dx,$$

kde

$$r = m, r = m+k, h_0 \rightarrow 0,$$

$$\varphi \in [L^2(\Omega_e)]^2, \text{supp } \varphi \subset E.$$

Zřejmě je

$$E \subset G_m \subset G_{m+k}$$

tedy

$$\langle \varphi, u_{h_0} \rangle_m = \langle \varphi, u_{h_0} \rangle_{m+k} = \int_E \varphi \cdot u_{h_0} dx.$$

Přejdeme-li k limitě $h_0 \rightarrow 0$, dostaneme

$$\langle \varphi, u^{(m)} \rangle_m = \langle \varphi, u^{(m+k)} \rangle_{m+k},$$

neboli

$$\int_{\Omega_e} \varphi \cdot (u^{(m)} - u^{(m+k)}) dx = 0.$$

Zvolíme-li

$$\varphi = u^{(m)} - u^{(m+k)}$$

(prodloužené nulou na $\Omega_e - G_m$,

resp. $\Omega_e - G_{m+k}$), dojdeme ke sporu s předpokladem. Platí

tedy (2.25) a můžeme definovat

$$(2.26) \quad u|_{G_m} = u^{(m)}.$$

Z nerovnosti (2.24) nyní plyne, že

$$|u|_{\varepsilon, \Omega_\varepsilon}^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} |u^{(m)}|_{\varepsilon, G_m}^2 \leq C_2.$$

Snadno dokážeme, že $u \in V_p(\Omega_\varepsilon)$. K tomu stačí ověřit podmínky na Γ_1 . V důsledku (2.26) pro stopy na Γ_1 platí

$$(2.27) \quad u|_{\Gamma_1} = u^{(m)}|_{\Gamma_1},$$

kde m je libovolné a podprostor $V_p(G_m)$ je slabě uzavřený v $[H^1(G_m)]^2$. Protože

$$u_{h_1}|_{G_m} \in V_p(G_m) \quad \forall h_1$$

slabá limita $u^{(m)}$ leží také ve $V_p(G_m)$. V důsledku

(2.27) je tedy $u \in V_p(\Omega_\varepsilon)$. Platí tedy i Kornova

nerovnost a

$$\|u\|_{1, \Omega_\varepsilon}^2 \leq C |u|_{\varepsilon, \Omega_\varepsilon}^2 \leq C \quad C_2 < \infty.$$

Dále ukážeme, že funkce u splňuje druhou stavovou rovnici (2.2), tj. můžeme psát $u = u(\varepsilon)$.

Zvolme testovací funkci $v \in V_p(\Omega_\varepsilon)$ libovolně. Prodlužme v (např. podle Babiče-Nikolského) na oblast σ , takže vznikne funkce $\tilde{v} \in [H^1(\sigma)]^2$ a platí

$$(2.28) \quad \tilde{v}|_{\Omega_h} \in V_p(\Omega_h) \quad \forall h.$$

Existuje posloupnost funkcí $v_\alpha \in [C^\infty(\bar{\sigma})]^2$ taková, že

$$(2.29) \quad v_\alpha \rightarrow \tilde{v} \quad \text{v } [H^1(\sigma)]^2 \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0.$$

Interpolaci funkce v_α v prostoru $[H_h(\Omega_h)]^2$ označme $v_{\alpha h}$. Máme pak

$$(2.30) \quad \|v_{\alpha h} - v_\alpha\|_{1, \Omega_h} \leq Ch \|v_\alpha\|_{2, \sigma}.$$

Protože však $v_{\alpha h}$ nesplňuje podmínky na Γ_1 , přidáme "opravy" $z_{\alpha h} \in [P_1(\Omega_h)]^2$ ve tvaru

$$z_{\alpha h_1} = a_1 - b(x_2 - x_{20}),$$

$$z_{\alpha h_2} = a_2 + b(x_1 - x_{10}),$$

kde x_{i0} jsou souřadnice těžiště úsečky Γ_1 . Konstanty a_1, a_2, b vypočteme tak, aby součet $v_{\alpha h} + z_{\alpha h}$ splňoval podmínky na Γ_1 , tedy klademe

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (a_1 - b(x_2 - x_{20})) ds + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha h_1} ds &= 0, \\ \int_{\Gamma_1} (a_2 + b(x_1 - x_{10})) ds + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha h_2} ds &= 0, \\ \int_{\Gamma_1} [x_1(a_2 + b(x_1 - x_{10})) - x_2(a_1 - b(x_2 - x_{20}))] ds + \\ + \int_{\Gamma_1} (x_1 v_{\alpha h_2} - x_2 v_{\alpha h_1}) ds &= 0. \end{aligned}$$

Přímým výpočtem a na základě konvergence (2.29) a (2.30) odvodíme

$$a_i = -(\text{mes } \Gamma_1)^{-1} \int_{\Gamma_1} v_{\alpha h_i} ds \rightarrow 0$$

pro $h \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $h = h(\alpha)$. Vskutku, pro $h < h_0$ je $\Omega_h \supset \bar{G}_{m_0}$, a tedy podle (2.30)

$$\begin{aligned} \|v_{\alpha h} - v_{\alpha}\|_{0,\Gamma_1} &\leq C \|v_{\alpha h} - v_{\alpha}\|_{1,G_{m_0}} \leq \\ &\leq C \|v_{\alpha h} - v_{\alpha}\|_{1,\Omega_h} \leq C_1 h \|v_{\alpha}\|_{2,\sigma}, \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1} v_{\alpha h} \, ds \rightarrow \int_{\Gamma_1} v_{\alpha} \, ds \quad \text{pro } h \rightarrow 0, \, i = 1, 2.$$

Na základě (2.29) však máme

$$\int_{\Gamma_1} v_{\alpha} \, ds \rightarrow \int_{\Gamma_1} \tilde{v}_i \, ds = \int_{\Gamma_1} v_i \, ds = 0.$$

Podobně pro b dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} b \int_{\Gamma_1} [(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2] \, ds &= a_1 x_{20} \, \text{mes } \Gamma_1 - a_2 x_{10} \, \text{mes } \Gamma_1 - \\ &- \int_{\Gamma_1} (x_1 v_{\alpha h_2} - x_2 v_{\alpha h_1}) \, ds \end{aligned}$$

a dokážeme, že

$$b \rightarrow 0 \quad \text{pro } h = h(\alpha) \rightarrow 0, \, \alpha \rightarrow 0.$$

Celkem tedy pro $h = h(\alpha) \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ platí

$$(2.31) \quad \|z_{\alpha h}\|_{1,\Omega_h} \leq \|z_{\alpha h}\|_{1,\sigma} \rightarrow 0.$$

Označíme-li

$$v_h^0 = v_{\alpha h} + z_{\alpha h} \in V_{ph}(\Omega_h),$$

potom platí

$$(2.32) \quad \|v_h^0 - \tilde{v}\|_{1,\Omega_h} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Vskutku, můžeme psát - pro normy $\|\cdot\|_{1,\Omega_h}$:

$$\|v_h^0 - \tilde{v}\| = \|v_{\alpha h} - \tilde{v} + z_{\alpha h}\| \leq \|v_{\alpha h} - v_{\alpha}\| + \|v_{\alpha} - \tilde{v}\| + \|z_{\alpha h}\|$$

a pro vhodně vybrané $\bar{x}$ a $h < h(\bar{x})$ bude každý ze tří členů pravé strany menší než $\varepsilon/3$, využijeme-li (2.30), (2.29) a (2.31).

Pišme nadále přibližnou stavovou rovnici (2.5) po dosazení $v_h = v_h^\circ$ ve tvaru

$$(2.33) \quad ((u_h, v_h^\circ))_{\Omega_h} = k_0 (\bar{\sigma}_0 + t_h, \operatorname{div} v_h^\circ)_{0, \Omega_h}.$$

Uvažujme posloupnost $\{h_n\}$, $h_n \rightarrow 0$, ale pro jednoduchost vynechme v dalším index „D“. Můžeme psát

$$(2.34) \quad |((u_h, v_h^\circ))_{\Omega_h} - ((u, v))_{G_m}| \leq \\ \leq |((u_h - u, v))_{G_m}| + |((u_h, v_h^\circ - v))_{G_m}| + |((u_h, v_h^\circ))_{\Omega_h - G_m}| = \\ = I_1 + I_2 + I_3.$$

Vzhledem ke konvergenci (2.23) je

$$(2.35) \quad I_1 < \varepsilon/6 \quad \text{pro } h < h_1(m).$$

Na základě (2.34) a (2.18) lze odhadnout

$$(2.36) \quad I_2 = |((u_h, v_h^\circ - v))_{G_m}| \leq C |u_h|_{\varepsilon, G_m} \|v_h^\circ - v\|_{1, G_m} < \varepsilon/6$$

pro $h < h_2$.

Odhad členu I_3 je složitější. Pro interpolaci $v_{\alpha h}$ na trojúhelníku $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_h)$ platí

$$(2.37) \quad \|v_{\alpha h}\|_{1, T} \leq C \|v_\alpha\|_{2, T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_h).$$

Nechť $G_m^h \subset \Omega_h$ je nejmenší sjednocení U trojúhelníků $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_h)$ takové, že $G_m^h \equiv U \supset \Omega_h - G_m$.

Zřejmě platí

$$(2.38) \quad \text{mes } G_m^h \leq \text{mes}(\Omega_a - G_m) + \sum_{k=1}^{N_0} \pi \left[\left(g_k + \frac{1}{m} + h \right)^2 - \left(g_k + \frac{1}{m} \right)^2 \right] + \text{mes}(\Omega_h - \Omega_a).$$

Dále máme

$$(2.39) \quad \|v_h^0\|_{1, \Omega_h - G_m} \leq \|v_h^0\|_{1, G_m^h} = \|v_{\alpha h} + z_{\alpha h}\|_{1, G_m^h} \leq \\ \leq \|v_{\alpha h}\|_{1, G_m^h} + \|z_{\alpha h}\|_{1, G_m^h}$$

a vzhledem k (2.37) a (2.38)

$$(2.40) \quad \|v_{\alpha h}\|_{1, G_m^h}^2 = \sum_{T \in G_m^h} \|v_{\alpha h}\|_{1, T}^2 \leq C \|v_{\alpha}\|_{2, G_m^h}^2.$$

Můžeme tedy psát vzhledem k (2.18), (2.39), (2.40)

$$(2.41) \quad |_3 = |((u_h, v_h^0))_{\Omega_h - G_m}| \leq C |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \|v_h^0\|_{1, \Omega_h - G_m} \leq \\ \leq \tilde{C} (\|v_{\alpha}\|_{2, G_m^h} + \|z_{\alpha h}\|_{1, \Omega_h}).$$

Shrneme-li odhady (2.34), (2.35), (2.36) a (2.41), odvodíme, že

$$|((u_h, v_h^0))_{\Omega_h} - ((u, v))_{\Omega_a}| \leq \\ \leq |((u_h, v_h^0))_{\Omega_h} - ((u, v))_{G_m}| + |((u, v))_{\Omega_a - G_m}| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{3} + C (\|v_{\alpha}\|_{2, G_m^h} + \|z_{\alpha h}\|_{1, \Omega_h}) + C \|u\|_{1, \Omega_a} \|v\|_{1, \Omega_a - G_m}$$

pro $h = h_2(m)$. Užijeme-li ještě odhadů (2.38) a (2.31), usoudíme, že

$$(2.42) \quad ((u_h, v_h^0))_{\Omega_h} \rightarrow ((u, v))_{\Omega_a} \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Vyšetřme dále limity členů na pravé straně rovnice (2.33).

Pišme

$$\begin{aligned} & |(\bar{t}_h, \operatorname{div} v_h^\circ)_{0, \Omega_h} - (\bar{t}, \operatorname{div} v)_{0, \Omega_e}| = \\ & = |(\bar{t}_h, \operatorname{div} v_h^\circ)_{0, \sigma} - (\bar{t}, \operatorname{div} \tilde{v})_{0, \sigma}| \leq \\ & \leq |(\bar{t}_h, \operatorname{div} (v_h^\circ - \tilde{v}))_{0, \sigma}| + |(\bar{t}_h - \bar{t}, \operatorname{div} \tilde{v})_{0, \sigma}| = I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Z odhadu (2.10) a z (2.32) plyne, že

$$I_4 = |(\bar{t}_h, \operatorname{div} (v_h^\circ - \tilde{v}))_{0, \Omega_h}| \leq C \|v_h^\circ - \tilde{v}\|_{1, \Omega_h} \rightarrow 0$$

pro $h \rightarrow 0$.

Člen I_5 konverguje k nule s $h \rightarrow 0$ díky (2.9) z Lemmatu 2.2. Odtud odvodíme, že pro $h \rightarrow 0$ platí

$$(2.43) \quad (\bar{t}_h, \operatorname{div} v_h^\circ)_{0, \Omega_h} \rightarrow (\bar{t}, \operatorname{div} v)_{0, \Omega_e}.$$

Dále je

$$\begin{aligned} & |(\bar{v}_0, \operatorname{div} v_h^\circ)_{0, \Omega_h} - (\bar{v}_0, \operatorname{div} v)_{0, \Omega_e}| \leq \\ & = |\bar{v}_0| \left\{ \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div} (v_h^\circ - \tilde{v}) dx \right| + \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div} \tilde{v} dx - \int_{\Omega_e} \operatorname{div} v dx \right| \right\} = \\ & = I_6 + I_7. \end{aligned}$$

Vzhledem k (2.32) je $I_6 \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$. Konečně je také

$$I_7 = \left| \int_{\Omega_h - \Omega_e} \operatorname{div} \tilde{v} dx \right| \rightarrow 0$$

pro $h \rightarrow 0$, neboť
 $\text{mes}(\Omega_h - \Omega_e) \rightarrow 0$.

Odtud plyne, že

$$(2.44) \quad (\bar{v}_0, \text{div } v_h^0)_{0, \Omega_h} \rightarrow (\bar{v}_0, \text{div } v)_{0, \Omega_e} .$$

Na základě vztahů (2.42), (2.43) a (2.44) vychází tedy z rovnice (2.33) limitním přechodem $h \rightarrow 0$ rovnice

$$((u, v))_{\Omega_e} = k_0 (\bar{v}_0 + t, \text{div } v)_{0, \Omega_e} .$$

To znamená, že u splňuje druhou stavovou rovnici (2.2) při libovolném $v \in V_P(\Omega_e)$; můžeme tedy psát $u = u(e)$.

Protože řešení rovnice (2.2) je jediné, platí tvrzení Lemmatu 3 o slabé konvergenci v $[H^1(G_m)]^2$ nejen pro diagonální podposloupnost $\{h_0\}$, nýbrž pro celou původní posloupnost $\{h\}$.

Tím je Lemma 2.3 dokázáno.

Lemma 2.4. Nechť jsou splněny předpoklady Lemmatu 2.3.

Pak platí

$$(2.45) \quad \liminf_{h \rightarrow 0} j_h(e(h), u_h) \geq j(e, u(e)) .$$

Důkaz. Pišme nejprve (srov. /1/ - část I, vzorce (13), (14))

$$I^2(\tau(u)) = Q(u) ,$$

takže

$$j_h(e(h), u_h) = (\text{mes } \Omega_h)^{-1} \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx .$$

Forma Q je kvadratická ve složkách deformace a platí

$$(2.46) \quad Q(u_h) \geq \mu_0 \sum_{i,j=1}^4 \varepsilon_{ij}^2(u_h) \geq 0 .$$

Můžeme psát

$$(2.47) \quad (\text{mes } \Omega_h)^{-1} \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx = (\text{mes } \Omega_e)^{-1} \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx + \\ + ((\text{mes } \Omega_h)^{-1} - (\text{mes } \Omega_e)^{-1}) \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx.$$

Vzhledem k (2.46) máme pro libovolné m nerovnosti

$$(2.48) \quad \liminf_{h \rightarrow 0} (\text{mes } \Omega_e)^{-1} \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx \geq \\ \geq \liminf_{h \rightarrow 0} (\text{mes } \Omega_e)^{-1} \int_{G_m} Q(u_h) dx \geq (\text{mes } \Omega_e)^{-1} \int_{G_m} Q(u) dx,$$

neboť zkoumaný integrál je slabě zdola spojitým funkcioálem a posloupnost $\{u_h\}$ slabě konverguje v $[H^1(G_m)]^2$ na základě Lemmatu 2.3.

Dále pro všechna $h \leq h_1$ vzhledem k (2.18) platí

$$0 \leq \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx \leq C |u_h|_{\varepsilon, \Omega_h}^2 \leq C_1.$$

Pak snadno odvodíme, že

$$(2.49) \quad |((\text{mes } \Omega_h)^{-1} - (\text{mes } \Omega_e)^{-1}) \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx| \leq C |\text{mes } \Omega_h - \text{mes } \Omega_e| \rightarrow \\ \rightarrow 0 \\ \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Kombinací (2.48) a (2.49) odvodíme podle (2.47)

$$\liminf_{h \rightarrow 0} j_h(e(h), u_h) \geq \text{mes } \Omega_e^{-1} \int_{G_m} Q(u) dx \quad \forall m.$$

Přejdeme-li ještě k limitě $m \rightarrow \infty$, odvodíme tvrzení (2.45).

Lemma 2.5. Uvažujme pevnou oblast Ω_e , $e \in \mathcal{U}_{ad}$ a regulární posloupnost triangulací $\mathcal{T}_h(\Omega_h)$, kde $\Omega_h = \Omega_h(e)$ jsou polygonální aproximace oblasti Ω_e , $h \rightarrow 0$.

Nechť $\tilde{u} \in [H^1(\sigma)]^2$ je libovolné rozšíření funkce $u \equiv u(a)$ na oblast σ a u_h jsou přibližná řešení rovnice (2.5), přičemž na pravé straně dosazujeme přibližná řešení t_h rovnice (2.4).

Pak platí

$$(2.50) \quad |\tilde{u} - u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Důkaz. Zavedeme označení

$$(2.51) \quad \begin{aligned} f_h(w_h) &= k_0(\tilde{v}_0 + t_h, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_h} \\ f(w_h) &= k_0(\tilde{v}_0 + t, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_e}. \end{aligned}$$

Na základě rovnice (2.5) můžeme pro libovolné $v_h \in V_{ph}(\Omega_h)$ psát

$$\begin{aligned} 2\mu_0 |u_h - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h}^2 &\leq ((u_h - v_h, u_h - v_h))_{\Omega_h} = \\ &= ((\tilde{u} - v_h, u_h - v_h))_{\Omega_h} + \{f_h(u_h - v_h) - ((\tilde{u}, u_h - v_h))_{\Omega_h}\} \leq \\ &\leq C|\tilde{u} - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} |u_h - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} + |(f_h(u_h - v_h) - ((\tilde{u}, u_h - v_h))_{\Omega_h})|. \end{aligned}$$

Po zkrácení dostaneme

$$|u_h - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \leq C_1(|\tilde{u} - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} + \sup_{w_h \in V_{ph}} \frac{|f_h(w_h) - ((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h}|}{|w_h|_{\varepsilon, \Omega_h}})$$

a odtud plyne

$$(2.52) \quad |\tilde{u} - u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \leq |\tilde{u} - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} + |v_h - u_h|_{\varepsilon, \Omega_h} \leq$$

$$\leq C_2 \left(\inf_{v_h \in V_{ph}} |\tilde{u} - v_h|_{\varepsilon, \Omega_h} + \sup_{w_h \in V_{ph}} \frac{|f_h(w_h) - ((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h}|}{|w_h|_{\varepsilon, \Omega_h}} \right)$$

Platí dále

$$((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h} = ((u, w_h))_{\Omega_c} + ((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h - \Omega_c}$$

a protože $w_h \in V_{ph}(\Omega_h)$ a u je řešení rovnice (2.2), máme

$$((u, w_h))_{\Omega_c} = f(w_h).$$

Platí tedy

$$|((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h} - f_h(w_h)| \leq |f(w_h) - f_h(w_h)| + |((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h - \Omega_c}|.$$

Máme však také

$$|(t_h, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_h} - (t, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_c}| =$$

$$= |(\tilde{t}_h - \tilde{t}, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_h}| \leq C \|\tilde{t}_h - \tilde{t}\|_{0, \Omega_h} |w_h|_{\varepsilon, \Omega_h},$$

$$|(\mathcal{V}_0, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_h} - (\mathcal{V}_0, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_c}| = |(\mathcal{V}_0, \operatorname{div} w_h)_{0, \Omega_h - \Omega_c}| \leq$$

$$\leq C \|\mathcal{V}_0\|_{0, \Omega_h - \Omega_c} |w_h|_{\varepsilon, \Omega_h}.$$

tedy

$$|f_h(w_h) - f(w_h)| \leq C k_0 [\|\tilde{v}_0\|_{0, \Omega_h - \Omega_\varepsilon} + \|\tilde{E}_h - E\|_{0, \Omega_h}] |w_h|_{\varepsilon, \Omega_h}.$$

Protože je také

$$|((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h - \Omega_\varepsilon}| \leq C \|\tilde{u}\|_{1, \Omega_h - \Omega_\varepsilon} |w_h|_{\varepsilon, \Omega_h},$$

máme celkem

$$(2.53) \quad \frac{|f_h(w_h) - ((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h}|}{|w_h|_{\varepsilon, \Omega_h}} \leq C_1 [\|\tilde{v}_0\|_{0, \Omega_h - \Omega_\varepsilon} + \|\tilde{E}_h - E\|_{0, \Omega_h} + \|\tilde{u}\|_{1, \Omega_h - \Omega_\varepsilon}].$$

Použijeme-li ještě Lemma 2.2 (ve speciálním případě $\alpha(h) = \alpha \forall h$) a Rellichovy věty, usoudíme, že pravá strana konverguje k nule pro $h \rightarrow 0$.

Abychom odhadli člen s infimem na pravé straně (2.52), sestrojíme k funkci u prvek $u_h^\circ \in V_{ph}(\Omega_h)$ stejně jako jsme sestrojili v_h° k danému v (srovnej (2.28) - (2.32)), takže platí (viz (2.32))

$$(2.54) \quad \|u_h^\circ - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0$$

Pak je zřejmé také

$$|\tilde{u} - u_h^\circ|_{\varepsilon, \Omega_h} \rightarrow 0$$

a dosadíme-li toto spolu s (2.53) do (2.52), plyne odtud konvergence v seminormě (2.50).

Dále je

$$|((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h - \Omega_\varepsilon}| \leq C \|\tilde{u}\|_{1, \Omega_h - \Omega_\varepsilon} \|w_h\|_{1, \Omega_h}$$

takže celkově dostáváme pro $h \rightarrow 0$

$$(2.58) \quad \frac{|((\tilde{u}, w_h))_{\Omega_h} - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1, \Omega_h}} \leq C_1 (\|\tilde{E}_h - E\|_{0, \Omega_h} + \|\tilde{v}_0\|_{0, \Omega_h - \Omega_\varepsilon} + \|\tilde{u}\|_{1, \Omega_h - \Omega_\varepsilon}) \rightarrow 0,$$

jestliže použijeme také Lemma 2.2 (ve speciálním případě

$$a(h) = a \quad \forall h)$$

a Rellichovy věty.

Abychom odhadli člen s infimem na pravé straně (2.53), k funkci u sestrojíme $u_h^0 \in V_{ph}(\Omega_h)$ stejně jako jsme sestrojili v_h^0 k danému v (viz (2.28) - (2.32)), takže platí (viz (2.32)).

$$(2.59) \quad \|u_h^0 - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Dosadíme-li (2.58) do pravé strany (2.53) a užijeme (2.59), plyne odtud konvergence (2.50).

Lemma 2.6. Nechť jsou splněny předpoklady Lemmatu 2.5

Pak platí

$$j_h(a, u_h) \rightarrow j(a, u(a)) \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\begin{aligned} |j_h(a, u_h) - j(a, u(a))| &= (\text{mes } \Omega_a)^{-1} \left| \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_a} Q(u) dx \right| + \left| ((\text{mes } \Omega_h)^{-1} - (\text{mes } \Omega_a)^{-1}) \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx \right| = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Zřejmě platí

$$I_1 \cdot \text{mes } \Omega_a \leq \left| \int_{\Omega_h} Q(u_h) dx - \int_{\Omega_h} Q(\tilde{u}) dx \right| + \left| \int_{\Omega_h - \Omega_a} Q(\tilde{u}) dx \right| = I_3 + I_4.$$

Máme však

$$\begin{aligned} Q(u_h) - Q(\tilde{u}) &= a_{ijkl} [\varepsilon_{ij}(u_h) \varepsilon_{kl}(u_h) - \varepsilon_{ij}(\tilde{u}) \varepsilon_{kl}(\tilde{u})] = \\ &= a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u_h - \tilde{u}) \varepsilon_{kl}(u_h) + a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\tilde{u}) \varepsilon_{kl}(u_h - \tilde{u}) = \\ &= q_1(u_h - \tilde{u}, u_h) + q_2(\tilde{u}, u_h - \tilde{u}), \end{aligned}$$

kde koeficienty a_{ijkl} jsou konstanty. Můžeme proto odhadnout na základě (2.18)

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \int_{\Omega_h} |Q(u_h) - Q(\tilde{u})| dx \leq \int_{\Omega_h} q_1(u_h - \tilde{u}, u_h) dx + \\ &+ \int_{\Omega_h} q_2(\tilde{u}, u_h - \tilde{u}) dx \leq C |u_h - \tilde{u}|_{\epsilon, \Omega_h} (|u_h|_{\epsilon, \Omega_h} + \\ &+ |\tilde{u}|_{\epsilon, \sigma}) \leq C_1 |u_h - \tilde{u}|_{\epsilon, \Omega_h}. \end{aligned}$$

Z Lemmatu 2.5 nyní plyne, že

$$I_3 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Konvergence

$$I_4 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0$$

je zřejmá. Celkem tedy máme

$$I_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Člen I_2 odhadneme stejně jako v (2.49). Odtud plyne tvrzení Lemmatu.

Nyní jsme již schopni přistoupit k důkazu hlavní věty celé kapitoly o konvergenci přibližných řešení.

Věta 2.1. Nechť $\{e(h)\}$, $h \rightarrow 0$, je posloupnost řešení přibližných úloh optimalizace (2.6) při regulárním zjemňování triangulací.

Pak existuje podposloupnost $\{e(\tilde{h})\}$, $\tilde{h} \rightarrow 0$ taková, že

$$(2.60) \quad e(\tilde{h}) \rightarrow e \quad \text{pro } \tilde{h} \rightarrow 0,$$

kde $e \in U_{ad}$ je řešení úlohy optimalizace (2.3).

Pro příslušná řešení $\tilde{t}_h$ a $u_{\tilde{h}}$ přibližných stavových úloh (2.4) a (2.5) platí

$$(2.61) \quad \tilde{t}_h \rightarrow \tilde{t}(e) \quad (\text{slabě}) \text{ v prostoru } H^1(\sigma),$$

$$(2.62) \quad u_{\tilde{h}} \rightarrow u(e) \quad (\text{slabě}) \text{ v prostoru } [H^1(G_m)]^2$$

kde $\sigma = \Omega_1 - \bar{\Omega}_0$, $\tilde{t}_h$, resp. $\tilde{t}(e)$ jsou funkce $\tilde{t}_h$, resp. $\tilde{t}(e)$ prodloužené nulou na oblast $\sigma - \Omega_h$, resp. $\sigma - \Omega_e$ a G_m jsou oblasti definované v Lemmatu 2.3.

Důkaz. Protože množina U_{ad} je kompaktní, existuje podposloupnost $\{e(\tilde{h})\}$ taková, že platí (2.60).

Podle definice přibližné úlohy optimalizace (2.6) platí

$$(2.63) \quad j_{\tilde{h}}(e(\tilde{h}), u_{\tilde{h}}) \leq j_{\tilde{h}}(\eta, u_{\tilde{h}}) \quad \forall \eta \in U_{ad}, \forall \tilde{h}.$$

Podle Lemmatu 2.4 platí

$$j(e, u(e)) \leq \liminf_{\tilde{h} \rightarrow 0} j_{\tilde{h}}(e(\tilde{h}), u_{\tilde{h}}).$$

Z Lemmatu 2.6 plyne dále, že

$$\lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} j_{\tilde{h}}(\eta, u_{\tilde{h}}) = j(\eta, u(\eta)).$$

Přejdeme-li tedy na obou stranách nerovnosti (2.63) k dolní limitě, dostaneme

$$j(e, u(e)) \leq \liminf_{\tilde{h} \rightarrow 0} j_{\tilde{h}}(\eta, u_{\tilde{h}}) = j(\eta, u(\eta)).$$

Jelikož η bylo libovolné, e je řešením původní optimalizační úlohy (2.3).

Konvergence (2.61), resp. (2.62) je bezprostředním důsledkem Lemmatu 2.2, resp. Lemmatu 2.3.

Poznámka. Zkombinujeme-li existenci řešení přibližné optimalizační úlohy (2.6) pro každý parametr h (viz /1/ část II) s Větou 2.1, dostáváme nový důkaz existence řešení původní optimalizační úlohy (2.3).

3. Abstraktní teorie řešení úloh optimálního návrhu oblastí a jejich aproximace

Cílem této kapitoly je jednak zformulovat obecně úlohu optimálního návrhu oblastí jako speciální úlohu optimálního řízení a postulovat postačující podmínky, jež zaručí existenci řešení, jednak se zabývat problematikou numerického řešení těchto úloh.

Bud' $\mathcal{G}$ množina "přípustných variací" oblastí $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, na nichž budeme řešit stavové úlohy (viz dále), $\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{G}}$, kde $\tilde{\mathcal{G}}$ bude eventuelně o něco širší třída těchto oblastí (zavedení systému $\tilde{\mathcal{G}}$ bude hrát svoji úlohu až v části, pojednávající o aproximaci). V systému $\tilde{\mathcal{G}}$ zavedeme konvergenci $\xrightarrow{\mathcal{G}}$ množin. Tzn. musíme umět říci co znamená, že posloupnost množin $\Omega_n \in \tilde{\mathcal{G}}$ konverguje k oblasti $\Omega \in \tilde{\mathcal{G}}$.

Nyní každé $\Omega \in \mathcal{G}$ přiřadíme Hilbertův prostor $V(\Omega)$ funkcí, jež jsou definovány na Ω . Jsou-li $y_n \in V(\Omega_n)$, $y \in V(\Omega)$ zadefinujeme dále, co znamená $y_n \rightarrow y$ (poznamenejme, že y_n, y mají různé definiční obory).

Stavovou relací budeme rozumět zobrazení

$$\varphi: \Omega \in \mathcal{G} \rightarrow u(\Omega) \in V(\Omega).$$

Tato relace je dána např. řešením parciální diferenciální rovnice, či nerovnice na oblasti Ω . Grafem φ budeme nazývat uspořádanou dvojici

$$G = \{(\Omega, u(\Omega))\},$$

kde $\Omega \in \mathcal{G}$ a $u(\Omega)$ je řešení stavové relace na Ω .

Konečně definujme účelový funkcionál $J(\Omega, y)$ pro $y \in V(\Omega)$, $\Omega \in \tilde{\mathcal{G}}$.

Abstraktní úlohou optimálního návrhu oblasti rozumíme problém

$$(\mathbb{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nalézt } \Omega^* \in \mathcal{G} \text{ takový, že} \\ J(\Omega^*, u(\Omega^*)) \leq J(\Omega, u(\Omega)) \quad \forall \Omega \in \mathcal{G}. \end{array} \right.$$

Jedná se tedy o úlohu spadající do oblasti variačního počtu.

K tomu, abychom ukázali, že $(\mathbb{P})$ má řešení, zformulujeme následující pořadavky:

(i) $\mathcal{G}$ je kompaktní vzhledem k zavedené konvergenci $\xrightarrow{\mathcal{G}}$.

(ii) jestliže $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \xrightarrow{\mathcal{G}} \Omega$, $u(\Omega_n), u(\Omega)$ jsou řešení stavových relací na Ω_n, Ω pak existuje posloupnost $\{u(\Omega_{n_k})\} \subset \{u(\Omega_n)\}$ taková, že

$$u(\Omega_{n_k}) \rightarrow u(\Omega).$$

(iii) J je zdola polospojité v následujícím smyslu:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_n, \Omega \in \mathcal{G}, \Omega_n \xrightarrow{\mathcal{G}} \Omega \\ y_n \in V(\Omega_n), y \in V(\Omega), y_n \rightarrow y \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} J(\Omega_n, y_n) \geq J(\Omega, y)$$

Věta X.1 Nechť platí (i), (ii), (iii). Pak existuje alespoň jedno řešení Ω^* úlohy $(\mathbb{P})$.

Důkaz. Buď

$$q = \inf_{\Omega \in \mathcal{G}} J(\Omega, u(\Omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\Omega_n, u(\Omega_n)),$$

tj. $\Omega_n \in \mathcal{G}$ je minimalizující posloupnost problému $(\mathbb{P})$

Z (i) plyne, že existuje vybraná posloupnost z $\{\Omega_n\}$ (budeme ji v dalším značit stejně) a oblast $\Omega^* \in \mathcal{G}$ taková, že

$$\Omega_n \xrightarrow{\mathcal{G}} \Omega^* \quad (\text{x.1})$$

Nechť $u(\Omega_n), u(\Omega^*)$ jsou řešení stavových úloh na Ω_n, Ω^* .

Z vlastnosti (ii) plyne existence vybrané posloupnosti $\{u(\Omega_{n_k})\} \subset \{u(\Omega_n)\}$ takové, že

$$u(\Omega_{n_k}) \rightarrow u(\Omega^*) \quad (\text{x.2})$$

Konečně z (iii) dostáváme:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\Omega_{n_k}, u(\Omega_{n_k})) \geq J(\Omega^*, u(\Omega^*)).$$

Na druhé straně $J(\Omega^*, u(\Omega^*)) \geq q$ a tedy

$$J(\Omega^*, u(\Omega^*)) = \inf_{\Omega \in \mathcal{G}} J(\Omega, u(\Omega)).$$

Poznámka X.1. Z (i), (ii), (iii) plyne existence řešení, neboli však jeho jednoznačnost.

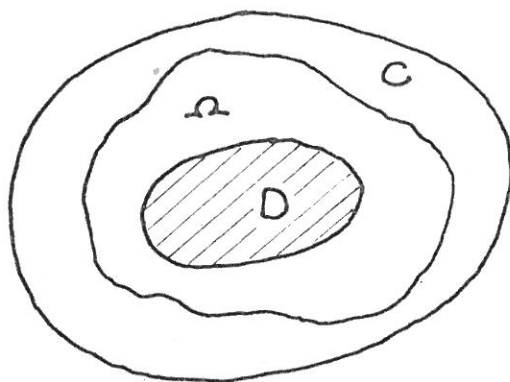
Ukažme si konkrétní aplikaci výsledků předchozí části:

Příklad X.1. Nechť C, D jsou omezené oblasti v $\mathbb{R}^n$, $D \subset C$.

Označme

$$\mathcal{G} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n \mid D \subset \Omega \subset C, \Omega \in \mathcal{M}^{\alpha}\}.$$

$\mathcal{M}^{\alpha}$ značí množinu všech oblastí s lipschitzovskou hranicí
 $\partial \Omega$ a konstantou lipschitzovskosti rovnou α , $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.



V systému $\mathcal{G}$ definujeme konvergenci množin následovně:

řekneme, že $\Omega_n \xrightarrow{\mathcal{G}} \Omega$, $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{G}$,

jestliže $\chi_n \rightarrow \chi$ v $L^2(C)$,

kde χ_n resp. χ je charakteristická funkce oblasti Ω_n , resp. Ω .

Nechť $V(\Omega) = H^1(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{G}$

a buď $y_n \in V(\Omega_n), y \in V(\Omega)$.
 jestliže

Řekneme, že $y_n \rightarrow y$,

$$\tilde{y}_n \rightarrow \tilde{y} \quad \text{v } H^1(C) \text{ slabě,}$$

kde $\tilde{y}_n$ resp. $\tilde{y}$ je Calderonovo rozšíření y_n resp. y a Ω_n resp. Ω na C .

Na každé $\Omega \in \mathcal{G}$ uvažujeme stavový problém

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(\Omega) + u(\Omega) &= f \\ \frac{\partial u(\Omega)}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \Omega$$

Stavová relace $\varphi: \Omega \rightarrow u(\Omega)$ je dána tedy řešením Neumannovy úlohy na Ω ($f \in L^2(C)$).

Konečně účelový funkcionál $J(\Omega, y)$ je dán vztahem

$$J(\Omega, y) = \int_{\Omega} |\nabla y - z_d|^2 dx,$$

kde

$$z_d \in L^2(C), \quad y \in H^1(\Omega).$$

Úlohou optimálního návrhu oblasti pro tento konkrétní příklad rozumíme úlohu:

$$(IP)_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nalézt } \Omega^* \in \mathcal{G} \text{ takovou, že} \\ J(\Omega^*, u(\Omega^*)) \leq J(\Omega, u(\Omega)) \quad \forall \Omega \in \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

kde $u(\Omega) \in H^1(\Omega)$ je řešením úlohy (X.3).

V dalším ukážeme, že $(IP)_1$ má alespoň jedno řešení. K tomu stačí ověřit platnost (i) - (iii).

Podmínka (i) je netriviální. Dá se však dokázat, že systém $\mathcal{G}$ je kompaktní vzhledem k zavedené topologii.

Ověřme (ii). Variační formulace (X.3) je:

$$(X.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nalézt } u(\Omega) \in H^1(\Omega) \text{ takovou, že} \\ \int_{\Omega} (\nabla u(\Omega) \cdot \nabla v + u(\Omega)v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Buďte $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{G}$ takové, že $\Omega_n \xrightarrow{\mathcal{G}} \Omega$ a $u(\Omega_n), u(\Omega)$ po řadě řešení (X.4) na Ω_n, Ω .

Speciálně

$$\int_{\Omega_n} (\nabla u(\Omega_n) \cdot \nabla v + u(\Omega_n)v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Zvolíme-li za testovací funkci v speciálně řešení $u(\Omega_n)$ zjistíme, že posloupnost $\{u(\Omega_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezena v tomto smyslu:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \alpha = \text{konst.} > 0 \quad \text{nezávislá na } n \text{ a taková, že} \\ \|u(\Omega_n)\|_{1, \Omega_n} \leq \alpha. \end{array} \right\} \quad (X.5)$$

Nechť $\widetilde{u}(\Omega_n)$ je Calderonovo rozšíření $u(\Omega_n)$ z oblasti Ω_n na C . Dá se ukázat, že normu operátoru rozšíření lze odhadnout shora nezávisle na $\Omega \in \mathcal{G}$, tj.

$$\|\widetilde{u}(\Omega_n)\|_{1, C} \leq \alpha \quad \forall n.$$

Existuje tedy vybraná posloupnost $\{\widetilde{u}(\Omega_{n_k})\} \subset \{\widetilde{u}(\Omega_n)\}$ a prvek $\omega \in H^1(C)$ takový, že

$$\widetilde{u}(\Omega_{n_k}) \rightharpoonup \omega \quad (\text{slabě}) \quad H^1(C).$$

Ukažme, že $\omega|_{\Omega} \equiv u(\Omega)$, tj. $\omega|_{\Omega}$ je řešením (X.4) na limitní oblasti Ω . Ekvivalentním vyjádřením (X.4) je

$$\int_C (\chi_n \nabla \widetilde{u}(\Omega_n) \cdot \nabla v + \chi_n \widetilde{u}(\Omega_n) v) dx = \int_C \chi_n f v dx \quad \forall v \in H^1(C) \quad (X.6)$$

Protože

$$\begin{aligned} \chi_n &\rightarrow \chi \quad \text{v } L^2(C) \\ \tilde{u}(\Omega_n) &\rightarrow w \quad (\text{slabě}) \text{ v } H^1(C), \end{aligned}$$

dostaneme odtud a limitním přechodem v (X.6), že

$$\int_C (\chi \nabla w \cdot \nabla v + \chi w v) dx = \int_C \chi f v dx \quad \forall v \in H^1(C),$$

neboli

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla v + w v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

tj.

$$w|_{\Omega}$$

je skutečně řešením (X.4) na Ω .

Vlastnost (iii) plyne ze slabé polospojivosti zdola normy.

V další části této kapitoly se budeme zabývat aproximací problému (P).

Buď $h > 0$ diskretizační parametr, $h \rightarrow 0_+$. Každému $h > 0$ přiřadíme systém $\sigma_h \in \tilde{\sigma}$. Obecně σ_h nemusí být částí σ . V případě, že $\sigma_h \subset \sigma \quad \forall h \in (0, 1)$ řekneme, že σ_h tvoří vnitřní aproximaci σ ; v opačném případě jej nazveme aproximací vnější. Každé oblasti $\Omega_h \in \sigma_h$ přiřadíme konečně - dimensionální prostor $V_h(\Omega_h)$ funkcí, definovaných na Ω_h . Dále definujeme diskrétní stavovou relaci $\psi_h: \Omega_h \in \sigma_h \rightarrow u_h(\Omega_h) \in V_h(\Omega_h)$. Konečně zavedeme diskrétní účelový funkcionál

$$J_h(\Omega_h, \psi_h), \quad \Omega_h \in \sigma_h, \quad \psi_h \in V_h(\Omega_h).$$

Aproximací úlohy nalezení optimálního tvaru oblasti nazveme problém

$$(P)_h \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nalézt } \Omega_h^* \in \sigma_h \\ J_h(\Omega_h^*, u_h(\Omega_h^*)) = J_h(\Omega_h, u_h(\Omega_h)) \quad \forall \Omega_h \in \sigma_h \end{array} \right. \quad \text{takový, že}$$

Přitom $u_h(\Omega_h)$ je řešením stavové relace ψ_h .

V dalším nás bude zajímat vztah mezi řešeními úloh $(\mathbb{P})$ a $(\mathbb{P})_h$. Kromě předpokladů (i), (ii), (iii) zavedeme ještě předpoklady nové a sice:

- (k) $\bar{\sigma}$ je kompaktní vzhledem k zavedení konvergence $\xrightarrow{\sigma}$;
- (kk) $\forall \Omega \in \bar{\sigma}$ existují $\Omega_h \in \sigma_h$ takové, že $\Omega_h \xrightarrow{\sigma} \Omega$;
- (kkk) Ze vztahu $\Omega_h \in \sigma_h, \Omega_h \xrightarrow{\sigma} \Omega$ plyne, že $\Omega \in \bar{\sigma}$;
- (ik) jestliže $\Omega_h \xrightarrow{\sigma} \Omega, \Omega_h \in \sigma_h, \Omega \in \bar{\sigma}$ a jsou-li $u_h(\Omega_h)$ řešení stavových relací ψ_h , pak existuje vybraná posloupnost $\{u_{h_k}(\Omega_{h_k})\} \subset \{u_h(\Omega_h)\}$ taková, že
- $$u_{h_k}(\Omega_{h_k}) \rightarrow u(\Omega) \quad k \rightarrow \infty,$$
- tj. $u(\Omega)$ řeší stavovou relaci ψ na Ω ;
- (vk) ze vztahu $\Omega_h \in \sigma_h, \Omega_h \xrightarrow{\sigma} \Omega, u_h(\Omega_h) \rightarrow u(\Omega)$ plyne
- $$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_h(\Omega_h, u_h(\Omega_h)) = \int(\Omega, u(\Omega)).$$

Platí:

Věta X.9 Necht' kromě (i) - (iii) platí (k) - (vk).

Pak pro $\forall h > 0 \exists$ řešení $\{\Omega_h^*, u_h(\Omega_h^*)\}$ úlohy $(\mathbb{P})_h$.

Navíc existuje vybraná posloupnost $\{\Omega_{h_k}^*, u_{h_k}(\Omega_{h_k}^*)\} \subset \{\Omega_h, u_h(\Omega_h^*)\}$ taková, že

$$\Omega_{h_k}^* \xrightarrow{\sigma} \Omega^*,$$

$$u_{h_k}(\Omega_{h_k}^*) \rightarrow u(\Omega^*),$$

kde $\Omega^* \in \bar{\sigma}$ řeší $(\mathbb{P})$ a $u(\Omega^*) \in V(\Omega^*)$ je řešením stavové relace ψ na Ω^* .

Důkaz. Existence řešení $\{\Omega_n^*, u_n(\Omega_n^*)\}$ úlohy $(TP)_n$

plyne z (i) - (iii). Z podmínky (k) plyne existence vybrané posloupnosti z $\{\Omega_n^*\}$ (v dalším ji označíme stejně) a oblasti $\Omega^* \in \tilde{\sigma}$ takové, že

$$\Omega_n^* \xrightarrow{\sigma} \Omega^* . \quad (X.6)$$

Z (kkk) ihned plyne $\Omega^* \in \sigma$. Z vlastnosti (ik) okamžitě plyne existence podposloupnosti $\{u_{h_k}(\Omega_{h_k}^*)\} \subset \{u_n(\Omega_n^*)\}$ takové, že

$$u_{h_k}(\Omega_{h_k}^*) \rightarrow u(\Omega^*) . \quad (X.7)$$

Zbývá ukázat, že $\{\Omega^*, u(\Omega^*)\}$ řeší úlohu (TP) . Z (vk), (X.6), (X.7) okamžitě dostáváme:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{h_k}(\Omega_{h_k}^*, u_{h_k}(\Omega_{h_k}^*)) \rightarrow J(\Omega^*, u(\Omega^*)) \quad (X.8)$$

Bud $\Omega \in \sigma$ libovolná, pevně zvolená. Z (kk) plyne existence posloupnosti $\Omega_n \in \sigma_n$ takové, že

$$\Omega_n \xrightarrow{\sigma} \Omega$$

a z definice $(TP)_n$ dostáváme:

$$J_n(\Omega_n^*, u_n(\Omega_n^*)) \leq J_n(\Omega_n, u_n(\Omega_n)) \quad \forall \Omega_n \in \sigma_n .$$

Odtud, z (X.8) a vlastnosti (vk) dostáváme limitním přechodem

$$J(\Omega^*, u(\Omega^*)) \leq J(\Omega, u(\Omega)) \quad \forall \Omega \in \sigma ,$$

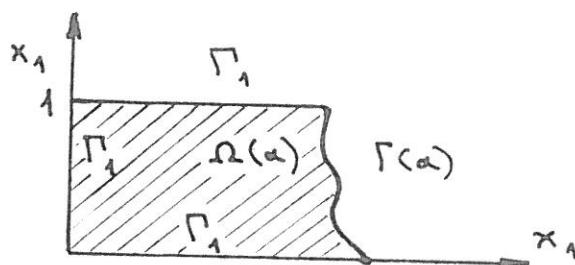
t.j. $(\Omega^*, u(\Omega^*))$ je řešením (TP) .

Příklad X.2 Nechť

$$U_{ad} = \{ \alpha \in C^{0,1}(\langle 0,1 \rangle) \mid 0 < \gamma_0 \leq \alpha \leq \gamma_1 ,$$

$$|\alpha'(x_2)| \leq \gamma_2 \text{ s.v. } v(0,1), \text{ meas } \Omega(\alpha) = \gamma_3 \} ,$$

de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou kladné konstanty vybrané tak, že $U_{ad} \neq \emptyset$. $\Omega(\alpha)$ značí množinu omezenou pevnou částí hranice Γ_1 a pohyblivou částí $\Gamma(\alpha)$, jež je grafem funkce α :



Definujeme $\sigma = \{ \Omega(\alpha), \alpha \in U_{ad} \}$.

Nechť $\Omega(\alpha_n), \Omega(\alpha) \in \sigma$. Řekneme, že $\Omega(\alpha_n) \xrightarrow{\sigma} \Omega(\alpha)$ právě tehdy, když

$$\alpha_n \rightrightarrows \alpha$$

(stejněměrně) v $\langle 0, 1 \rangle$.

Na každé $\Omega(\alpha), \alpha \in U_{ad}$ uvažujeme stavový problém stejný jako v příkladu X.1 tj.:

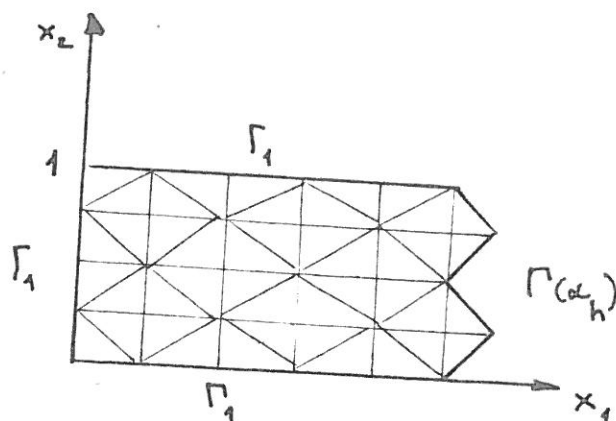
$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(\alpha) + u(\alpha) &= f \\ \frac{\partial u(\alpha)}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \Omega(\alpha) \\ \partial \Omega(\alpha) \end{aligned}$$

Konvergence funkcí $y_n \in V(\Omega(\alpha_n))$ k funkci $y \in V(\Omega(\alpha))$ se definuje stejně jako u příkladu X.1, rovněž tak účelový funkcionál.

Nechť $0 \equiv a_0 < a_1 < \dots < a_n \equiv 1$ je dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $|a_i - a_{i-1}| \leq h, i=1, \dots, n$. Definujme množinu U_{ad}^h vztahem:

$$U_{ad}^h = \left\{ \alpha_h \in C^0(\langle 0, 1 \rangle) \mid \alpha_h|_{\overline{a_{i-1}a_i}} \in P_1(\overline{a_{i-1}a_i}), \right. \\ \left. 0 = \gamma_0 \leq \alpha_h(x_2) \leq \gamma_1; \frac{|\alpha_h(a_i) - \alpha_h(a_{i-1})|}{|a_i - a_{i-1}|} \leq \gamma_2, \text{ meas } \Omega(\alpha_h) = \gamma_3 \right\},$$

kde $P_1(\overline{a_{i-1}a_i})$ značí množinu lineárních funkcí nad intervalu $\overline{a_{i-1}a_i}$ a $\Omega(\alpha_h)$ je množina omezená pevnou částí hranice Γ_1 a pohyblivou částí $\Gamma(\alpha_h)$, jež je grafem funkce $\alpha_h \in U_{ad}^h$.



Položme nyní $\mathcal{G}_h = \{\Omega(\alpha_h), \alpha_h \in U_{ad}^h\}$. Z konstrukce je okamžitě vidět, že $\mathcal{G}_h \subset \mathcal{G} \quad \forall h \in (0, 1)$.

Protože $\Omega(\alpha_h)$ je polygonální oblast, můžeme provést její triangulaci např. tak, jak je naznačeno na obrázku. Oblast $\Omega_h(\alpha_h)$ s provedenou triangulací $\mathcal{T}(h, \alpha_h)$ označme $\Omega_h(\alpha_h)$. Každé $\Omega_h(\alpha_h)$ přiřadíme konečně - dimensionální prostor

$$V_h(\Omega_h(\alpha_h)) = \{v_h \in C(\overline{\Omega(\alpha_h)}) \mid v_h|_{T_i} \in P_1(T_i) \quad \forall T_i \in \mathcal{T}(h, \alpha_h)\} \subset H^1(\Omega(\alpha_h))$$

Diskrétní stavová relace je definována pomocí Ritz-Galerkinovy aproximace:

nalézt $u_h(\alpha_h) \in V_h(\Omega_h(\alpha_h))$ takový, že

$$\int_{\Omega_h(\alpha_h)} (\nabla u_h(\alpha_h) \cdot \nabla v_h + u_h(\alpha_h) v_h) dx = \int_{\Omega_h(\alpha_h)} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h(\Omega_h(\alpha_h))$$

Konečně účelový funkcional je dán vztahem

$$J_h(\alpha_h, u_h(\alpha_h)) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla u_h(\alpha_h) - z_d|^2 dx,$$

kde

$$D \subset \Omega(\alpha_h) \quad \forall \alpha_h \in U_{ad}^h.$$

Aproximací této konkrétní úlohy optimálního návrhu oblasti rozumíme problém:

$$(P)_{h_1} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_h^* \in U_{ad}^h \\ J(\Omega_h(\alpha_h^*), u_h(\alpha_h^*)) = J(\Omega_h(\alpha_h), u_h(\alpha_h)) \\ \forall \alpha_h \in U_{ad}^h \end{array} \right.$$

Za jistých předpokladů, jež se týkají systému dělení $\{J(h, \alpha_h)\}, h \rightarrow 0+, \alpha_h \in U_{ad}^h$ je možno ukázat, že (k) - (vk) je splněno a tedy je možno aplikovat větu X.2.

4. Výpočet gradientu účelové funkce úlohy optimalizace kruhových otvorů

V této kapitole stanovíme diferenciál účelového funkcionálu $j(a, u(a))$ definovaného ve zprávě / 4 /, / 5 / (úlohu zde připomeneme) ve spojitě formě a necháme již na uživateli konkrétní implementaci metody konečných prvků k opravě polohy i průměru chladicích otvorů.

Na oblasti Ω_a (viz obr. 1 zprávy / 5 /) řešíme rovnici pro vedení tepla

$$(4.1) \quad -\Delta v = 0 \quad \text{v } \Omega_a$$

s okrajovými podmínkami

$$(4.2) \quad v = v_0 \quad \text{na } \Gamma_a$$

(sjednocení hranic chladicích kanálů, v_0 nezávisí na poloze a průměru kanálů),

$$(4.3) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (\text{vnější hranice}),$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{na } \Gamma_0 \quad (\text{hranice odlitku})$$

Je-li α koeficient tepelné vodivosti a α koeficient vnější tepelné vodivosti, potom slabá formulace úlohy je jako obvykle (viz / 5 /):

Buď $V(\Omega_a) = \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \quad \text{na } \Gamma_a\}$.
Hledáme $v \in H^1(\Omega)$ tak, že

$$(4.5) \quad v - v_0 \in V(\Omega_a),$$

$$(4.6) \quad \int_{\Omega_a} a \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma_1} \alpha v w \, ds = \int_{\Gamma_0} q w \, ds$$

$$\forall w \in V(\Omega_\varepsilon); \quad g \in L^2(\Gamma_0).$$

Návrhové parametry, viz /4 /, jsou souřadnice středů kruhových otvorů $(S_1^{(m)}, S_2^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots, N_0$ a jejich poloměry g_m . Budeme předpokládat $g_m \geq g_{\min} > 0$.

$$(4.7) \quad \sum_{m=1}^N g_m^2 \leq c_0/\pi,$$

$$(4.8) \quad n^{jm} S^{(m)} + d^{jm} g_m \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, j_m$$

(soustava j_m polorovin pro každý otvor).

Buďte dány dále Lamého koeficienty λ, μ a koeficient k_0 (v dalším budeme označovat λ též Λ).

Hledáme vektor posunutí $u = (u_1, u_2)$ vyhovující Lamého rovnicím

$$(4.9) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i = k_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad \text{v } \Omega_\varepsilon,$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

a okrajovým podmínkám na

$$(4.10) \quad \tau_{ij} \nu_j = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_\varepsilon,$$

kde

$$(4.11) \quad \tau_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - k_0 \nu \delta_{ij}.$$

Ve slabé formulaci to znamená, že hledáme

$$u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \quad \text{tak, že } \forall v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \quad \text{je}$$

$$(4.12) \quad \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu e_{ij}(u) e_{ij}(v) dx =$$

$$= \int_{\Omega} k_0 \nabla \operatorname{div} v \, dx.$$

Za účelový funkcionál budeme brát

$$(4.13) \quad j(\varepsilon) = \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} I^2(\tau) \, dx,$$

kde $I(\tau)$ je nějaký invariant tenzoru napětí, např.

$$I^2(\tau) = \tau_{ij} \tau_{ij}, \\ \in \mathbb{R}^{3m}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Buď nyní } \tilde{\varepsilon} = (\Delta \tilde{z}_1, \dots, \Delta \tilde{z}_m, \Delta \tilde{g}_1, \dots, \Delta \tilde{g}_m) \in$$

$$\text{a } \tilde{v}_\lambda, u^\lambda$$

řešení naší úlohy pro $\varepsilon = \varepsilon_0 + \lambda \tilde{\varepsilon}$,
kterou za předpokladů (4.7) - (4.8) předpokládáme řešitelnou
pro $0 \leq \lambda \leq \delta, \delta > 0$. Naším cílem bude stanovit

$$\frac{d}{d\lambda} j(\varepsilon_0 + \lambda \tilde{\varepsilon}) \Big|_{\lambda=0}.$$

Je-li

$$\frac{d}{d\lambda} j(\varepsilon_0 + \lambda \tilde{\varepsilon}) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{3M} \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_i,$$

potom zřejmě největší klesání funkcionálu $j(\varepsilon)$

od bodu ε_0 je ve směru $-\tilde{\varepsilon}$,

a další iterace, zlepšující polohu a poloměr otvorů, je pro $\lambda > 0$:

$$(4.14) \quad j(\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon}) \doteq j(\varepsilon_0) - \lambda |\tilde{\varepsilon}|^2;$$

zde volíme λ "vhodně"; předpokládáme, že vektor $\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon}$
vyhovuje (4.7) - (4.8). Označme množinu těch $\tilde{\varepsilon}$ vyhovujících
(4.7), (4.8) a $g_m \geq g_{\min}$: U_{ad} .

Je to zřejmě konvexní množina

Obecně vektor $\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon}$

promítáme na U_{ad} :

bud $P = P(\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon})$

tento průmět. Potom bude

$$j(P(\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon})) = j(\varepsilon_0) + \sum_{i=1}^{2M} \tilde{\varepsilon}_i (P_i - \varepsilon_i).$$

Volíme pochopitelně λ tak, aby

$$(4.15) \quad j(\varepsilon_0) > j(P(\varepsilon_0 - \lambda \tilde{\varepsilon})).$$

Je-li splněno (4.15), můžeme krok prodloužit (např. 2x).

Není-li splněno (4.5), potom krok zkrátíme (třeba na polovinu).

Přejdeme k určení diferenciálu j . Budeme používat metodu zobrazení, viz např. O. Pironneau /6/.

Budte tedy $\varepsilon^\lambda = \varepsilon_0 + \lambda \tilde{\varepsilon}$,

a označme na

$$\Omega_{\varepsilon^\lambda} \equiv \Omega_\lambda$$

řešení $\tilde{v}_\lambda, u^\lambda$

a cenový funkcional j_λ .

Bud $\gamma = \gamma(x)$

diffeomorfismus $\bar{n}_0$ na $\bar{n}_\lambda$,

dostatečně hladký na $\bar{n}$.

Uvažme m -tý kruhový otvor. Budeme nejdříve uvažovat $\tilde{\varepsilon}$ nenulové pouze pro tento otvor; pro jednoduchost nebudeme psát index m . Necht se střed S posune na S' a poloměr se změni na g' .

Uvažme nejdříve lineární zobrazení vnějšku S (souřadnice x) na vnějšek S' (souřadnice γ). Dostaneme, je-li $S' = S + \lambda \Delta S$, $g' = g + \lambda \Delta g$:

$$(4.16) \quad \gamma = x + \lambda \Delta S + (x - S) \lambda \frac{\Delta g}{g}.$$

V dalším budeme uvažovat λ malé a funkci $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, s nosičem v malém okolí hranice Γ_ε^m m -tého otvoru a s $\psi(x) = 1$ na Γ_ε^m tak, aby pro pevné ψ a λ dostatečně malé, zobrazení

$$(4.17) \quad \gamma = x + [\lambda \Delta S + (x - S) \lambda \frac{\Delta g}{g}] \psi(x)$$

bylo C^∞ diffeomorfizmem $\bar{n}_0$ na $\bar{n}_\lambda$, který formulí (4.17) rozšíříme na diffeomorfizmus $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$. Je

$$(4.18) \quad y = y(x, \lambda), \quad y \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-\delta, \delta)) \quad \text{pro } \delta$$

dosti malé a je vidět, že

$$(4.19) \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{viz bod v. } \Omega_\lambda}}{x} = x(y, \lambda), \quad x \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-\delta, \delta)).$$

Máme

$$(4.20) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \left(1 + \lambda \frac{\Delta \varphi}{\varphi} \psi\right) + \left[\lambda \Delta S_i + (x_i - S_i) \lambda \frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right] \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Označíme-li tečkou derivování podle λ , je

$$(4.21) \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{\Delta \varphi}{\varphi} \psi + \left[\Delta S_i + (x_i - S_i) \frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right] \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Protože $y_i = y_i(x(y, \lambda), \lambda)$ je

$$(4.22) \quad \delta_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j}.$$

Píšeme-li (4.22) ve formě, $\delta_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}(x, \lambda) \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y(x, \lambda), x)$, potom dostaneme pro $\lambda = 0$:

$$(4.23) \quad 0 = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_j} + \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right],$$

tedy

$$(4.24) \quad \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right]_{\lambda=0} = -\delta_{ij} \frac{\Delta \varphi}{\varphi} \psi - \left[\Delta S_i + (x_i - S_i) \frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right] \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Uvažme ještě $h \in C^1(\bar{\Omega})$ a nechť nosič funkce ψ konverguje k Γ_a^m . Dostaneme

$$\lim_{\Omega} \int h(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = \int h v_i ds.$$

Zřejmě ještě dostaneme

$$(4.25) \quad \frac{d}{d\lambda} \left[\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]_{\lambda=0} = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_i} \Big|_{\lambda=0} = 2 \frac{\Delta \rho}{S} \psi + \\ + \left[\Delta S_i + (x_i - S_i) \frac{\Delta \rho}{S} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

Buď nyní

$$\tilde{v}_\lambda(y) = \tilde{v}_\lambda(y(x, \lambda)) = \tilde{v}_\lambda(x), \\ \tilde{w} \in V(\Omega_0), \quad \tilde{w}(x) = w(y(x, \lambda)).$$

Máme

$$(4.26) \quad \int_{\Omega_\lambda} a \frac{\partial \tilde{v}_\lambda}{\partial y_i} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy + \alpha \int_{\Gamma_\lambda} w ds = \int_{\Gamma_0} g w ds.$$

Po substituci $y = y(x, \lambda)$ dostaneme z (4.26)

$$(4.27) \quad \int_{\Omega_0} a \left[\frac{\partial \tilde{v}_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right] \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{dy}{dx} dx + \alpha \int_{\Gamma_\lambda} \tilde{w} ds = \\ = \int_{\Gamma_0} g \tilde{w} ds.$$

Předpokládejme nyní, že existuje $\tilde{v}_\lambda$ ve $W^{1,2}(\Omega_0)$ a že $\tilde{v}_\lambda$ jsou spojitě v λ v prostoru $W_{loc}^{2,2}(\Omega_0 \cup \Gamma_\lambda)$, což lze snadno dokázat. Dostáváme tak

(4.28) Věta. Pro $\tilde{v}_0 \in V(\Omega_0)$ je $\forall \tilde{w} \in V(\Omega_0) \cap W^{2,2}$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_0} a \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_i} dx + \alpha \int_{\Gamma_1} \tilde{u}_0 \tilde{w} ds = \\
 & = \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} ds + \\
 & + \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial n} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_k} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] ds - \\
 & - \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_i} \left[\Delta S_i^{(m)} + (x_i - S_i^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] v_j ds .
 \end{aligned}$$

□

Přístupme nyní k variaci vektoru posunutí u . Vzhledem k tomu, že u je určeno až na posunutí a otočení, tj. až na polynom $(b_1 + bx_2, b_2 - bx_1)$, můžeme požadovat podmínku

$$(4.29) \quad \int_{\Gamma_1} u ds = 0, \quad \int_{\Gamma_2} (x_1 u_2 - x_2 u_1) ds = 0$$

nebo pro nějakou $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_1, |\tilde{\Gamma}| > 0$, a totéž pro

srovnávací funkce; označíme si podobně jako výše:

$$u^\lambda(y) = \tilde{u}^\lambda(x), \quad \tilde{v}(x) = v(y), \quad \tilde{v} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2).$$

Dostáváme tak na Ω_λ

$$\begin{aligned}
 (4.30) \quad & \int_{\Omega_\lambda} \left[\Lambda \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial y_i} \frac{\partial v_j}{\partial y_i} + \mu \left(\frac{\partial u_i^\lambda}{\partial y_i} + \frac{\partial u_j^\lambda}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_i} - k_0 v^\lambda \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right] dy = \\
 & = 0 .
 \end{aligned}$$

Po transformaci na Ω_0 plyne

$$(4.31) \int_{\Omega_0} \left[\Lambda \frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} + \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^\lambda}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} - k_0 \tilde{\sigma}_\lambda \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right] \frac{dy}{dx} dx = 0.$$

Předpokládejme opět, že existuje $\tilde{u}^\lambda$ ve $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, a že $\tilde{u}^\lambda$ jsou spojitě v prostoru $W_{loc}^{2,2}(\Omega_a \cup \Gamma_a; \mathbb{R}^2)$, což lze snadno dokázat.

Dostáváme tak (Λ je Lamého koeficient λ)

(4.32) Věta.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left[\Lambda \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} + 2\mu a_{ij}(\tilde{u}) a_{ij}(v) \right] dx - \\ & - k_0 \tilde{\sigma}_0 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} \Big] dx = \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_m} \left\{ \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_k} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] \right. \\ & \cdot v_i \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} + \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_l} \left[\Delta S_l^{(m)} + (x_l - S_l^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] v_j - \\ & - \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] v_k \Big\} ds + \\ & + \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_m} \left\{ \mu \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_k} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{\rho_m} \right] \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial n} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \left[\Delta S_l^{(m)} + (x_l - S_l^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] v_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \\
 & + 2\mu e_{ij}(\tilde{u}_0) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] v_j - \\
 & - 2\mu e_{ij}(\tilde{u}_0) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \left[\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] v_k \} ds \\
 & - k_0 \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} \left\{ \tilde{v}_0 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \left[\Delta S_j^{(m)} + (x_j - S_j^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] v_i - \right. \\
 & \left. - \tilde{v}_0 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} \left[\Delta S_j^{(m)} + (x_j - S_j^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] v_j \right\} ds
 \end{aligned}$$

□

Označme nyní

$$(4.33) \quad j_\lambda = \frac{1}{|\Omega_\lambda|} \int \tau_{ij}^\lambda \tau_{ij}^\lambda dy, \quad \text{kde}$$

$$(4.34) \quad \tau_{ij}^\lambda = \Lambda \delta_{ij} \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_k} + \mu \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial y_j} + \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_i} \right) - k_0 \tilde{v}^\lambda \delta_{ij}.$$

Všimněme si, že při současném pohybu všech otvorů a změn jejich poloměrů dostaneme transformaci Ω_0 na Ω_λ ve tvaru

$$(4.35) \quad y = x + \lambda \sum_{m=1}^{N_0} \left[\Delta S^{(m)} + (x - S^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{g_m} \right] \psi_m(x),$$

kde $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ψ_m mají nosiče v dostatečně malém okolí Γ_e^m a $\psi_m(x) = 1$ na Γ_e^m .

Uvažme z tohoto hlediska

$$\frac{d}{d\lambda} j_\lambda \Big|_{\lambda=0}.$$

Ponecháme-li označení funkcí $\tilde{\sigma}^\lambda, \tilde{u}^\lambda$ jako výše, dostaneme

(4.36)

$$\begin{aligned} f_\lambda = & \frac{1}{|\Omega_\lambda|} \int_{\Omega_0} [(3\Lambda^2 + 4\mu\Lambda) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right)^2 + \\ & + 3k_0^2 (\tilde{\sigma}^\lambda)^2 - (6\Lambda k_0 + 4\mu k_0) \frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \tilde{\sigma}^\lambda + \\ & + \mu^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} + \frac{\partial \tilde{u}_j^\lambda}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_j} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{u}_i^\lambda}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_i} \right)] \frac{dy}{dx} dx. \end{aligned}$$

Nyní

(4.37)

$$\begin{aligned} f_\lambda|_{\lambda=0} = & \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} [(6\Lambda^2 + 8\mu\Lambda) \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_j^0}{\partial x_j} + \\ & + 6k_0^2 \tilde{\sigma}^0 \tilde{\sigma}^0 - (6\Lambda k_0 + 4\mu k_0) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \tilde{\sigma}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \tilde{\sigma}^0 \right) + 8\mu^2 \varepsilon_{ij} (\tilde{u}^0) \varepsilon_{ij} (\tilde{u})] dx - \\ & - \frac{f_0}{|\Omega_0|} \sum_{\mathfrak{M}=1}^{N_0} \int_{\Gamma_{\mathfrak{M}}} [\Delta S_i^{(m)} + (x_i - S_i^{(m)}) \frac{\Delta p_m}{p_m}] v_i ds - \\ & - \frac{1}{|\Omega_0|} \sum_{\mathfrak{M}=1}^{N_0} \int_{\Gamma_{\mathfrak{M}}} (6\Lambda^2 + 8\mu\Lambda) \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_k} [\Delta S_k^{(m)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m} v_i \frac{\partial \tilde{u}_j^0}{\partial x_j} + \\
 & + \frac{1}{|\Omega_0|} \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} (3\Lambda^2 + 4\mu\Lambda) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \right)^2 [\Delta S_k^{(m)} + \\
 & + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_k ds + \frac{1}{|\Omega_0|} (6\Lambda k_0 + 4\mu k_0) \cdot \\
 & \cdot \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_k} [\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_i \tilde{v}^0 ds - \\
 & - \frac{1}{|\Omega_0|} (6\Lambda k_0 + 4\mu k_0) \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} \tilde{v}^0 \cdot \\
 & \cdot [\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_k ds - \\
 & - \frac{1}{|\Omega_0|} 2\mu^2 \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_k} [\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_j + \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_j} [\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_i \cdot \\
 & \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^0}{\partial x_i} \right) ds + \frac{1}{|\Omega_0|} 4\mu^2 \sum_{m=1}^{N_0} \int_{\Gamma_e^m} a_{ij}(\tilde{u}^0) \cdot \\
 & \cdot a_{ij}(\tilde{u}^0) [\Delta S_k^{(m)} + (x_k - S_k^{(m)}) \frac{\Delta \rho_m}{g_m}] v_k ds \cdot
 \end{aligned}$$

Označme

(4.38)

$$\begin{aligned} j_1 = & \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} [6\Lambda^2 + 8\mu\Lambda] \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \right. \\ & + 6k_0^2 \tilde{\varphi}^0 \tilde{\varphi}^0 - (6\Lambda k_0 + 4\mu k_0) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \tilde{\varphi}^0 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \tilde{\varphi}^0 \right) + 8\mu^2 a_{ij}(\tilde{u}^0) a_{ij}(\tilde{u}^0) \right] dx \end{aligned}$$

a budeme se zabývat jeho výpočtem metodou sdružených rovnic. Podotkněme ovšem, že řešením rovnic (4.28) pro $\tilde{\varphi}^0$ a (4.32) pro $\tilde{u}^0$ nám umožňuje přímý výpočet (4.38). Zkušenost ukazuje, že metoda sdružených rovnic je algoritmicky výhodná.

Viz J.M.Boisserie, R. Glowinski / 7 /.

K tomu účelu, označme k dvojici $U = (\tilde{\varphi}, \tilde{u})$ testovací dvojice $\bar{U} = (\bar{\varphi}, \bar{u}) \in V(\Omega_0) \times W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, kde $\bar{u}$ splňuje podmínku (4.29). Buď $k > 0$ vhodná konstanta (o její velikosti viz poznámka dále) a položme $P \equiv (\varphi^*, u^*)$,

(4.39)

$$\begin{aligned} ((\bar{U}, P)) = & k \int_{\Omega_0} \alpha \nabla \bar{\varphi} \nabla \varphi^* + k \int_{\Gamma_1} \alpha \bar{\varphi} \varphi^* ds + \\ & + \int_{\Omega_0} [\Lambda \operatorname{div} \bar{u} \operatorname{div} u^* + 2\mu a_{ij}(\bar{u}) a_{ij}(u^*) - k_0 \bar{\varphi} \operatorname{div} u^*] dx. \end{aligned}$$

Označme dále

$$(4.40) \quad j_1(\bar{u}) = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} [(6\Lambda^2 + 8_\mu \Lambda) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i} + \\ + 6k_0' \bar{v} \tilde{v}^0 - (6\Lambda k_0 + 4_\mu k_0) (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \tilde{v}^0 + \\ + \bar{v} \frac{\partial \tilde{u}_i^0}{\partial x_i}) + 8_\mu^2 a_{ij}(\bar{u}) a_{ij}(\tilde{u}^0)] dx,$$

a hledejme $P \in V(\Omega_0) \times W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ podmínka (4.24) tak, že platí $\forall \bar{u}$ z tohoto prostoru

$$(4.41) \quad \langle \bar{u}, P \rangle = j_1(\bar{u}).$$

Dostáváme zřejmě

(4.42) Věta.

$$j_1((\tilde{v}_1^0, \tilde{u}^0)) = \langle (\tilde{v}_1^0, \tilde{u}^0), P \rangle = \\ = k \langle F_1, v^* \rangle + \langle F_2, u^* \rangle,$$

kde F_1 a F_2 jsou funkcionály na pravých stranách rovnic (4.28) resp. (4.32).

Při řešení (4.41) je třeba splnění V-elipticity:

$$(4.43) \quad \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq \alpha \int_{\Omega} [|\nabla \bar{v}|^2 + \bar{v}^2 + a_{ij}(\bar{u}) a_{ij}(\bar{u})] dx, \\ \alpha > 0.$$

Ukářeme na jeden prostý odhad, který ovšem může být dosti hrubý.

Zřejmě stačí k platnosti (4.43), aby

$$(4.39) \int_{\Omega_0} [\Lambda (\operatorname{div} \bar{u})^2 - k_0 \bar{v} \operatorname{div} \bar{u}] dx +$$

$$+ k_\alpha \int_{\Gamma_1} \bar{v}^2 ds \geq 0, \quad \text{tedy}$$

$$\int_{\Omega_0} \left\{ \left[\Lambda^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \bar{u} - \frac{k_0}{2\Lambda^{\frac{1}{2}}} \bar{v} \right]^2 - \frac{k_0^2}{4\Lambda} \bar{v}^2 \right\} dx +$$

$$+ k_\alpha \int_{\Gamma_1} \bar{v}^2 ds \geq 0.$$

Stačí tedy, aby

$$(40) \quad \frac{k}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla \bar{v}|^2 dx + k_\alpha \int_{\Gamma_1} \bar{v}^2 ds \geq \frac{k_0^2}{4\Lambda} \int_{\Omega_0} \bar{v}^2 dx.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\bar{v} = 0$ na Γ_e , můžeme ji předpokládat prodlouženou nulou dovnitř otvorů. Ve (4.40) můžeme tedy oblast Ω_0 nahradit oblastí bez otvorů. Předpokládejme, že $\tilde{\Omega}_0$ lze rozdělit "podél odlitku" na

$\tilde{\Omega}_0^+$ a $\tilde{\Omega}_0^-$

$$(4.41) \quad \tilde{\Omega}_0^+ = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < a, f_+(x_1) < x_2 < b\}$$

$$\tilde{\Omega}_0^- = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < f_-(x_1)\}$$

kde f_+, f_- jsou spojité na $[0, a]$.

Stačí tedy volit k tak, aby

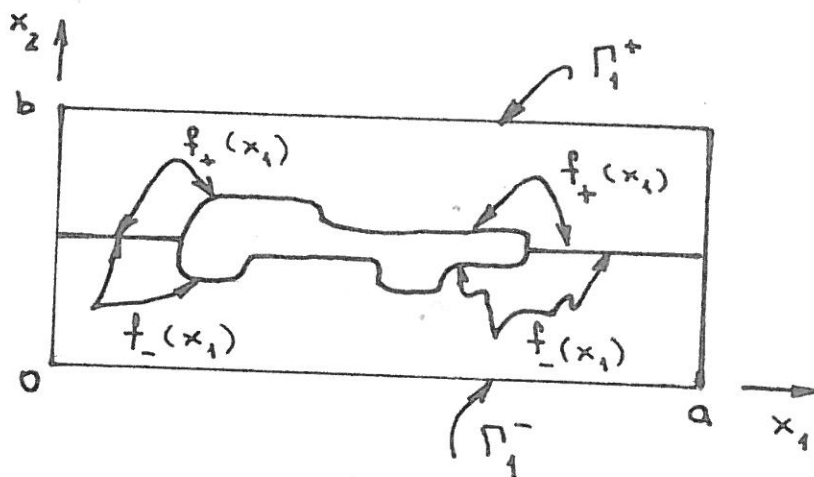
$$(4.42) \quad \frac{k}{2} \int_{\tilde{\Omega}_0^\pm} |\nabla \tilde{\psi}|^2 dx + k\alpha \int_{\Gamma_1^\pm} \tilde{\psi}^2 ds \geq \frac{k_0^2}{4\Lambda} \int_{\tilde{\Omega}_0^\pm} \tilde{\psi}^2 dx,$$

kde $\Gamma_1^\pm$ jsou vrchní, resp. spodní strana $\tilde{\Omega}_0^\pm$.

(4.43) Věta. (4.42) je splněno pokud

$$k = \max \left[\frac{b^2 k_0^2}{\Lambda}, \frac{b k_0^2}{2\Lambda\alpha} \right].$$

Důkaz: (viz obr. 4.44):



Máme pro $\tilde{\Omega}_0^-$: $\tilde{\psi}(x_1, x_2) = \tilde{\psi}(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2}(x_1, \eta) d\eta$, tedy

$$[\tilde{\psi}(x_1, x_2)]^2 \leq 2[\tilde{\psi}^2(x_1, 0) + b \int_0^{f_-(x_1)} (\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2}(x_1, \eta))^2 d\eta]$$

tedy

$$(4.44) \quad \int_0^{f(x_1)} \tilde{u}^2(x_1, x_2) dx_2 \leq 2b \tilde{u}^2(x_1, 0) + \\ + 2b^2 \int_0^{f(x_1)} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}(x_1, \eta) \right)^2 d\eta$$

a integrováním (4.44) přes $x_1 \in (0, d)$

dostaneme

$$(4.45) \quad \int_{\Omega_0^-} \tilde{u}^2 dx \leq 2b \int_{\Gamma_1} \tilde{u}^2(x_1, 0) dx_1 + 2b^2 \int_{\Omega_0^-} |\nabla \tilde{u}|^2 dx ;$$

stačí tedy, aby vzhledem k (4.42) a (4.45) bylo

$$\frac{2\Lambda k}{k_0^2} \geq 2b^2, \quad \frac{4\Lambda k\alpha}{k_0^2} \geq 2b ; \quad \text{pro } \tilde{\Omega}_0^+ \quad \text{probíhá}$$

důkaz stejně. $\square$

5. Z á v ě r

Práce na řešení optimalizace termoelastických systémů pro konstrukční pracoviště k.p. ŠKODA Plzeň byla motivována potřebou nalezení optimálního tepelného režimu soustavy forma - kov při lícím procesu. Byly odvozeny a ve zprávách popsány teoretické metody řešící rovinný model této úlohy. Zároveň byl sestaven algoritmus a odladěny programy pro zkušební výpočet konkrétního rozložení teplot při zadaných okrajových podmínkách. Obdržené výsledky potvrdily vhodnost použití zvolené metody při řešení zadaného problému.

L i t e r a t u r a

- /1/ J. Nečas, I. Hlaváček, J. Haslinger: Optimalizace termoelastických systémů. Část I. - Výzkumná zpráva Sz 4380 V, Plzeň 1983
Část II. - Výzkumná zpráva Sz 4405 V, Plzeň 1984
- /2/ J. Nečas, I. Hlaváček: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles. SNTL Praha 1983.
- /3/ E.J. Hang, B. Rousselet: Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics. II. Eigenvalue variations. J. Struct. Mech 8(2), (1980), 161-186
- /4/ Optimalizace termoelastických systémů, část I., Sz 4380 V, Plzeň 1983
- /5/ Optimalizace termoelastických systémů, část II, Sz 4405 V, Plzeň 1984
- /6/ O. Pironneau: Optimal shape design for elliptic systems, INRIA
- /7/ J.M. Boissarie, R. Glowinski: Optimization of the thickness law for thin axisymmetric shells comput. & structures, vol. 8, pp. 331-343, Pergamon Press 1978