Š K O D A , koncernový podnik, PLZEŇ
ÚSTŘEDNÍ VÝZKUMNÝ ÚSTAV
Výzkum strojírenský

Duševní majetek k.p.ŠKODA - nelze užít bez jeho souhlasu.

Doc.RNDr. Jindřich N e č a s DrSc
Ing.RNDr. Ivan H l a v á č e k CSc
RNDr. Jaroslav H a s l i n g e r CSc
RNDr. Jan M a n d e l CSc
RNDr. Tomáš R o u b í č e k
RNDr. Štěpán Z á m e č n í k CSc

MDT: 519.3:539.383

O p t i m a l i z a c e t e r m o e l a s t i c k ý c h s y s t é m ů

Část II.

Zak. č. : 715-092-2141/7

Odpovědný pracovník: RNDr.L.Prášek CSc
Vedoucí střediska: Ing.V.Hauer CSc
Vedoucí odboru: Ing.M.Balda CSc
Ředitel ústavu Ing.Z.Kletečka CSc

Číslo zprávy: Sz 4405 V
Druh zprávy: průběžná
Číslo kopie: 8

Stran: 74 Obrázků: 8 Příloh: 0

V Plzni dne 15.12.1984

A n o t a c e

MDT: 519!3:539.383 Sz 4405 V
VÝZK-Z
NEČAS Jindřich, doc.,RNDr.,DrSc
HLAVÁČEK Ivan, ing.,RNDr.,CSc
HASLINGER Jaroslav, RNDr.,CSc
MANDEL Jan, RNDr.,CSc
ROUBÍČEK Tomáš, RNDr.,
ZÁMEČNÍK Štěpán, RNDr.,CSc
Optimalizace termoelastických systémů.
Plzeň, ŠKODA/ÚVZÚ-VS, 1984
74 stran, 8 obrázků
Teoretická část obsahuje důkaz existence řešení spojitých a diskrétních modelů úlohy optimální polohy a velikosti průměrů kruhových otvorů. Dále obsahuje teoretickou studii konvergence diskrétních modelů úlohy identifikace tepelných toků. V praktické části je identifikační úloha aproximována pomocí MKP. Je sestaven a odladěn program pro výpočet identifikační úlohy.

OBSAH

1. Existence řešení úlohy optimalizace kruhových otvorů

V této kapitole ukážeme, že existuje alespoň jedno řešení úlohy optimalizace kruhových otvorů, definované podobně jako v kapitole 21 výzkumné zprávy [1] . Na rozdíl od formulace (11) - (15) v [1] budeme zde uvažovat mírně modifikovanou úlohu.

Nechť je dáno (viz obr. 1)

- oblast Ω_o
- funkce g na $\partial\Omega_o$ udávající tepelný tok vyvolaný odlitkem, vypočtená z úlohy identifikace (viz [1] - kap. 1)
- okrajové hodnoty ϑ_o na části hranice $\Gamma_a \subset \partial\Omega_a$, kterou tvoří sjednocení kružnic - řezů chladícími kanály $(\vartheta_o = \text{konst.})$,
- výchozí konfigurace polohy a velikosti otvorů, tj. oblast Ω_{a^o},
- materiálové konstanty $a, \lambda, \mu, k_o, \alpha$,
- množina $U_{ad} \subset R^{3N_o}$ přípustných hodnot návrhových parametrů a, kterou tvoří polohy středů a velikosti poloměrů kruhových otvorů.

Označme Ω_a oblast s vyňatými kruhovými otvory a vyňatou podoblastí Ω_o.

Stavový problém má 2 části:

1. Úlohu stacionárního vedení tepla:

najít funkci $\vartheta \in V(\Omega_a)$, kde

$$V(\Omega_a) = \{v \in H^1(\Omega_a) : v = 0 \text{ na } \Gamma_a\},$$

pro kterou platí

$$\vartheta - \vartheta_o \in V(\Omega_a),$$

$$(1) \quad \int_{\Omega_a} a \nabla\vartheta \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha\vartheta w \, ds = \int_{\partial\Omega_o} g w \, ds \quad \forall w \in V(\Omega_a)$$

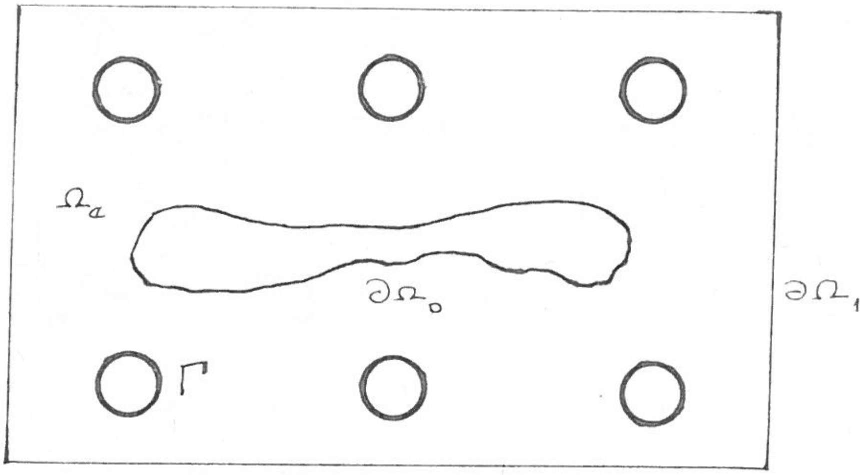
Sz.4405 V

Zde $\partial\Omega_1$ je "vnější" hranice, tedy hranice obdélníka Ω_1. Tedy

(2) $$\partial\Omega_a = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \Gamma_a ,$$

kde pouze Γ_a závisí na parametrech $a \in U_{ad}$, zatímco $\partial\Omega_0$ a $\partial\Omega_1$ jsou na a nezávislé.

Dále je $\vartheta_0 \in H^1(\Omega_a)$ funkce, jejíž stopa na Γ_a je rovna zadaným hodnotám. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že stopa ϑ_0 na $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_0$ je rovna nule.



Obr. 1

2. Statickou úlohu teorie pružnosti - rovinné deformace - s daným teplotním polem.

Nechť $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_1$ je úsečka kladné míry (délky),

(3) $$V_p = \Big\{ u \in [H^1(\Omega_a)]^2 : \int_{\Gamma_1} u \, ds = 0 ,$$

$$\int_{\Gamma_1} (x_1 u_2 - x_2 u_1) \, ds = 0 \Big\} .$$

Hledáme vektorovou funkci posunutí $u \in V_p(\Omega_a)$ takovou, že

$$(4) \quad \int_{\Omega_a} [\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)]\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_a} k_0 \vartheta \operatorname{div} v \, dx \qquad \forall\, v \in V_p(\Omega_a).$$

Zde ϑ je funkce teploty - řešení úlohy (1).

Definujme (srovnej (19), (20) v [1])

$$(5) \quad U_{ad} = \Big\{ a^{(m)} = (S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \varrho_m)_{m=1}^{N_0} :$$

$$\varrho_m \geq \varrho_{min} > 0,$$

$$n^{jm} . S^{(m)} + d^{jm} + \varrho_m \leq 0, \qquad m = 1, \dots, N_0, \quad j = 1, \dots, J_m$$

$$\sum_{m=1}^{N_0} \varrho_m^2 \leq c_0/\pi \Big\}$$

(kde $\varrho_{min}, c_0, d^{jm}$ a n^{jm} jsou dány)

a účelový funkcionál (viz [1] - (13), (14))

$$(6) \quad j(a, u(a)) = (\operatorname{mes} \Omega_a)^{-1} \int_{\Omega_a} I^2(\tau)\, dx, \quad \tau = \tau(u(a)).$$

<u>Úloha optimalizace</u> zní:

najít $a \in U_{ad}$ takový, že

$$(7) \quad j(a, u(a)) \leq j(\eta, u(\eta)) \qquad \forall\, \eta \in U_{ad},$$

přičemž $u(a)$ značí řešení stavové úlohy (4) na oblasti Ω_a a $u(\eta)$ na oblasti Ω_η.

Sz.4405 V

Věta 1.1. Úloha optimalizace (1) - (7) má alespoň jedno řešení.

Důkaz bude založen na několika pomocných lemmatech.
V dalším budeme označovat

$$\vartheta = \Omega_1 \div \overline{\Omega}_0 .$$

Lemma 1.1. Budiž $u \in V(\Omega_a)$. Pak platí zobecněná Friedrichsova nerovnost

$$(8) \qquad \|u\|^2_{1,\Omega_a} \leq C\, |u|^2_{1,\Omega_a} \qquad \forall a \in U_{ad} ,$$

kde konstanta C nezávisí na a a na pravé straně je seminorma z prvních derivací.

Důkaz. Rozdělme oblast Ω_a na N_0 podoblastí takových, že

$$\Omega_{am} \supset \Omega'_m , \quad m = 1, \dots, N_0$$

(viz I.2 a obr. 2 zprávy [1]).
Každá z nich tedy obsahuje právě jeden otvor.

Uvažujme libovolnou z oblastí Ω_{am} a umístíme polární souřadnice do středu $S^{(m)}$ kruhu K_m.

Pak tedy

$$\Omega_{am} = \{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi , \quad 0 \leq r \leq R(\varphi) \} .$$

Můžeme psát

$$\int_{\Omega_{am}} |\nabla u|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_m}^{R(\varphi)} \left[(u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\varphi)^2 \right] r\, dr ,$$

kde indexy r, φ značí parciální derivace.

Nechť $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_a) \cap V(\Omega_a)$.

Pak

$$u(r_1, \varphi_1) = \int_{\rho_m}^{r_1} u_r(r, \varphi_1)\, dr ,$$

$$u^2(r_1,\varphi_1) \leq (r_1-\varrho_m)\int_{\varrho_m}^{r_1} u_r^2\,dr \leq R_o \int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u_r^2(r,\varphi_1)\,dr\,,$$

kde

$$R_o = \max_m\left(\max_\varphi R(\varphi)\right) \leq \max_m\left(\operatorname{diam}\Omega_{am}\right) < \infty\,.$$

Integrací dostaneme

$$\|u\|^2_{0,\Omega_{am}} = \int_0^{2\pi}\int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u^2(r_1,\varphi_1)\,r_1\,dr_1\,d\varphi_1 \leq$$

$$\leq R_o\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} r_1\left(\int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u_r^2(r,\varphi_1)\,dr\right)dr_1 \leq$$

$$\leq R_o\int_0^{2\pi} d\varphi_1\,\frac{1}{2}\left(R_o^2-\varrho_m^2\right)\int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u_r^2(r,\varphi_1)\,dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}R_o^3\int_0^{2\pi} d\varphi_1\int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u_r^2(r,\varphi_1)\,dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}R_o^3\,\varrho_{min}^{-1}\int_0^{2\pi}\int_{\varrho_m}^{R(\varphi_1)} u_r^2(r,\varphi_1)\,r\,dr\,d\varphi_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}R_o^3\,\varrho_{min}^{-1}\int_{\Omega_{am}} |\nabla u|^2\,dx\,.$$

 Sz.4405 V

Přičteme-li na obou stranách čtverec seminormy, odvodíme

$$(9) \quad \|u\|^2_{1,\Omega_{am}} \leq \left(1+\frac{1}{2}R_o^3 \varrho_{min}^{-1}\right) |u|^2_{1,\Omega_{am}} .$$

Odhad (8) nyní vyplývá sečtením odhadů (9) přes všechna m pro nekonečně hladká u. Z hustoty množiny takových funkcí ve $V(\Omega_a)$ odvodíme (8) i pro $u \in V(\Omega_a)$. Q.E.D.

Nechť nyní $\{a_n\}$ je posloupnost parametrů $a_n \in U_{ad}$ taková, že

$$(10) \quad a_n \longrightarrow a \quad \text{v} \quad R^{3N_o} .$$

Označme v dalším $\Omega_{a_n} \equiv \Omega_n$ a řešení první části stavové úlohy (1)

$$(11) \quad \int_{\Omega_n} a \nabla t . \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha t w \, ds = \int_{\partial\Omega_0} g w \, ds -$$

$$- \int_{\Omega_n} a \nabla \vartheta_o . \nabla w \, dx \qquad \forall \; w \in V(\Omega_n)$$

$$t(a_n) \equiv t^n \in V(\Omega_n).$$

Dosadíme-li sem $w = t^n$ a užijeme Lemmatu 1, dostaneme (využíváme i toho, že koeficient $a_1 \geq a \geq a_o > 0$)

$$(12) \quad \|t^n\|^2_{1,\Omega_n} \leq C |t^n|^2_{1,\Omega_n} \leq \frac{C}{a_o} \int_{\Omega_n} a |\nabla t^n|^2 dx \leq$$

$$\leq \tilde{C} \left(\|g\|_{0,\partial\Omega_o} \|t^n\|_{0,\partial\Omega_o} + a_1 |\vartheta_o|_{1,\Omega_n} |t^n|_{1,\Omega_n} \right).$$

Můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že ϑ_0 je konstantní v nějakém okolí každého z kruhů K_k, $k=1,\dots,N_0$, limitní oblasti Ω_a. Potom jestliže definujeme pro přirozená $m=1,2,\dots$ oblasti

(13) $$G_m = \left\{ x\in\Omega_a : |x-S^{(k)}| > \varrho_k + \frac{1}{m},\ k=1,\dots,N_0 \right\}$$

můžeme psát pro nějaké pevné m

$$\operatorname{supp} \nabla\vartheta_0 \subset G_m ,$$

tedy

(14) $$|\vartheta_0|_{1,\Omega_n} = |\vartheta_0|_{1,G_m} = \text{const} \qquad \forall\, n > n_0(m),$$

je-li

$$\bar{G}_m \subset \Omega_n \qquad \forall\, n > n_0(m).$$

Označme $\tilde{t}^n$ prodloužení funkce t^n do oblasti $\mathcal{O}-\bar{\Omega}_n$ nulou. Potom zřejmě pro stopy na $\partial\Omega_0$ platí

(15) $$\|t^n\|_{0,\partial\Omega_0} = \|\tilde{t}^n\|_{0,\partial\Omega_0} \le C\, \|\tilde{t}^n\|_{1,\mathcal{O}}$$

kde C nezávisí na n. Můžeme dosadit (14) a (15) do (12). Tak dostaneme

$$\|\tilde{t}^n\|^2_{1,\mathcal{O}} \le C_1\, \|\tilde{t}^n\|_{1,\mathcal{O}}$$

a odtud

(16) $$\|\tilde{t}^n\|_{1,\mathcal{O}} = \|t^n\|_{1,\Omega_n} \le C_1 \qquad \forall\, n > n_0(m).$$

Hledáme nyní řešení druhé variační stavové rovnice (4), tj. $u \in V_p(\Omega_a)$,

(17) $$\int_{\Omega_a} \tau_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_{\Omega_a} k_0 (\vartheta_0 + t)\, \operatorname{div} v\, dx$$

$$\forall\, v \in V_p(\Omega_a).$$

Označme v dalším $(t(a), u(a))$ řešení úlohy (11), (17) na oblasti Ω_a, $a \in U_{ad}$. Dokážeme

Lemma 1.2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že

$$a_n \in U_{ad}, \quad a_n \to a \quad v \quad R^{3N_0}.$$

Pak existuje podposloupnost $\{a_k\}$ taková, že

(18) $$\tilde{t}(a_k) \to t(a) \quad \text{(slabě) v} \quad H^1(\mathcal{O}),$$

(19) $$u(a_k) \to u(a) \quad \text{(slabě) v} \quad [H^1(G_m)]^2$$

pro každé dostatečně velké m.

Důkaz. Pišme pro stručnost $u(a_n) \equiv u^n$,

$$\left(\int_{\Omega_n} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2 (u^n)\, dx \right)^{1/2} = |u^n|_{\varepsilon,\Omega_n}.$$

Z(17) plyne pro $v = u^n$

$$2\mu_0 \int_{\Omega_n} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2 (u^n)\, dx \le \int_{\Omega_n} \tau_{ij}(u^n)\, \varepsilon_{ij}(u^n)\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_n} k_0 (\vartheta_0 + t^n)\, \operatorname{div} u^n\, dx \le$$

$$\leq C(\|\tilde{\sigma}_0\|_{0,\vartheta} + \|\tilde{t}^n\|_{0,\vartheta})\|\varepsilon_{11}(u^n) + \varepsilon_{22}(u^n)\|_{0,\Omega_n},$$

kde $\tilde{\sigma}_0$ je konstantní prodloužení funkce σ_0 do kruhů K_k, $k=1,\dots,N_0$. Využijeme-li odhadu (16), máme odtud

$$2\mu_0 |u^n|^2_{\varepsilon,\Omega_n} \leq \tilde{C}|u^n|_{\varepsilon,\Omega_n},$$

tedy

(20) $$|u^n|_{\varepsilon,\Omega_n} \leq C_3$$

pro všechna dostatečně velká n.

Uvažujme pevnou oblast G_m. Víme, že existuje $n_0(m)$ takové, že

$$n > n_0(m) \Rightarrow G_m \subset \Omega_n.$$

Potom

(21) $$|u^n|_{\varepsilon,G_m} \leq |u^n|_{\varepsilon,\Omega_n} \leq C_3.$$

Existuje konstanta C_1 tak, že platí Kornova nerovnost (viz např. [2])

(22) $$|u^n|_{\varepsilon,G_m} \geq C_1\|u^n\|_{1,G_m}$$

(C_1 ovšem závisí na m). Vskutku, $u^n/_{G_m} \in V_p(G_m)$, protože $u^n \in V_p(\Omega_n)$.

Z (21), (22) plyne, že pro dost velká n je

(23) $$\|u^n\|_{1,G_m} \leq C_1^{-1}C_3 = C_2.$$

Protože $V_p(G_m)$ je reflexívní Banachův prostor, existuje prvek $u^{(m)} \in [H^1(G_m)]^2$ a podposloupnost $\{u^{n_1}\}$ taková, že

(24) $$u^{n_1}|_{G_m} \rightarrow u^{(m)} \quad \text{(slabě) v } [H^1(G_m)]^2$$

pro $n_1 \rightarrow \infty$.

Pro G_{m+1} dostaneme analogické tvrzení, jestliže vybereme vhodnou podposloupnost $\{u^{n_2}\}$ posloupnosti $\{u^{n_1}\}$, atd.

Uvažujme diagonální podposloupnost $\{u^{D_n}\}$ všech posloupností $\{u^{n_1}\}, \{u^{n_2}\}, \ldots$.

Existuje funkce $u \in V_p(\Omega_\varepsilon)$ taková, že

(25) $$u^{D_n} \rightarrow u|_{G_m} \quad \text{(slabě) v } [H^1(G_m)]^2 \ \forall m.$$

Vskutku, existence zobecněných derivací $\partial u_j / \partial x_i$ plyne z definice Sobolevova prostoru.

Kromě toho,

(26) $$\|u^{(m)}\|_{1,G_m} \leq C_2 \quad \forall m,$$

neboť koule v $[H^1(G_m)]^2$ je slabě uzavřená a platí (23).

Pro všechna kladná celá m a k platí na G_m skoro všude

(27) $$u^{(m)} = u^{(m+k)}|_{G_m}.$$

Vskutku, nechť pro dvojici $\{m, k\}$ neplatí (26) právě na množině $E \subset G_m$, $\text{mes}\, E > 0$.

Uvažujme dvě posloupnosti hodnot funkcionálů:

$$\langle \varphi, u^{D_n} \rangle_r = \int_{G_r} \varphi \cdot u^{D_n} \, dx ,$$

kde

$$r = m \quad a \quad r = m+k , \; n \to \infty ,$$

$$\varphi \in [L^2(\Omega_a)]^2 , \quad \operatorname{supp} \varphi \in E .$$

Zřejmě

$$E \subset G_m \subset G_{m+k} ,$$

tedy

$$\langle \varphi, u^{D_n} \rangle_m = \langle \varphi, u^{D_n} \rangle_{m+k} = \int_E \varphi \cdot u^{D_n} dx \quad \forall n ,$$

limitním přechodem $n \to \infty$ plyne

$$\langle \varphi, u^{(m)} \rangle_m = \langle \varphi, u^{(m+k)} \rangle_{m+k} ,$$

neboli

$$\int_{\Omega_a} \varphi \cdot (u^{(m)} - u^{(m+k)}) \, dx = 0 .$$

Zvolíme-li $\varphi = u^{(m)} - u^{(m+k)}\big|_{G_m}$, dojde(me) ke sporu s předpokladem.

Můžeme tedy definovat

(28) $$u\big|_{G_m} = u^{(m)} .$$

Z (26) vyplývá, že

$$\|u\|^2_{1,\Omega_a} = \lim_{m\to\infty} \|u^{(m)}\|^2_{1,G_m} = C_2^2 < \infty .$$

Funkce u patří do $V_p(\Omega_a)$. Stačí k tomu ověřit podmínky na Γ_1. V důsledku (28), (27) však pro stopy na Γ_1 platí

$$u|_{\Gamma_1} = u^{(m)}|_{\Gamma_1}$$

a podprostor $V_p(G_m)$ je slabě uzavřený v $[H^1(G_m)]^2$.

Protože všechny

$$u^{n_1}\big|_{G_m} \in V_p(G_m),$$

ze (24) vyplývá, že $u^{(m)}$ splňuje podmínky na Γ_1.
Tím je (25) dokázáno.

V důsledku omezenosti posloupnosti $\{\tilde{t}^n\}$ (16) existuje podposloupnost (označíme ji stejným symbolem) a prvek $\tilde{t} \in H^1(\Theta)$ takové, že

$$(29) \qquad \tilde{t}^n \longrightarrow \tilde{t} \qquad \text{(slabě) v} \quad H^1(\Theta).$$

Nechť je dáno $w \in V(\Omega_d)$. Existuje posloupnost $\{w_{\varkappa}\},\ \varkappa \to 0,\ w_{\varkappa} \in C^{\infty}(\Omega_d) \cap V(\Omega_d)$

taková, že

$$\operatorname{supp} w_{\varkappa} \cap \partial K_k = 0, \quad k = 1, \ldots, N_0,$$

$$w_{\varkappa} \to w \quad \text{v} \quad H^1(\Omega_d) \quad \text{pro} \quad \varkappa \to 0.$$

Uvažujme libovolné pevné $w_{\varkappa}$. Zřejmě $w_{\varkappa} \in V(\Omega_n)$ pro $n > n_1(\varkappa)$, protože $\operatorname{supp} w_{\varkappa} \subset \Omega_n$. Platí tedy

$$\int_{\Theta} a \nabla \tilde{t}^n \cdot \nabla w_{\varkappa}\, dx = \int_{\Omega_n} a \nabla \tilde{t}^n \cdot \nabla w_{\varkappa}\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega_0} g\, w_{\varkappa}\, ds - \int_{\Omega_n} a \nabla \vartheta_0 \cdot \nabla w_{\varkappa}\, dx - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t}^n w_{\varkappa}\, ds.$$

Užijeme-li při limitním přechodu $n \to \infty$ (29), dostaneme

$$(30) \quad \int_{\Theta} a \nabla \tilde{t} \cdot \nabla w_{\varkappa}\, dx = \int_{\partial\Omega_0} g\, w_{\varkappa}\, ds - \int_{\Omega_d} a \nabla \vartheta_0 \cdot \nabla w_{\varkappa}\, dx - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \tilde{t}\, w_{\varkappa}\, ds.$$

Ukážeme nyní, že

(31) $\tilde{E} = 0$ v $\vartheta - \Omega_a$.

Vskutku, nechť $\tilde{E} \neq 0$ na množině $E \subset \vartheta - \Omega_a$, kde $\operatorname{mes} E > 0$. Označme $K_{k\varepsilon}$ kruh o středu $S^{(k)}$, ale se zmenšeným poloměrem $\varrho_k - \varepsilon$.

Budiž

$$\Omega_\varepsilon = \vartheta - \bigcup_{k=1}^{N_0} \overline{K_{k\varepsilon}}.$$

Potom zřejmě existuje $n_0(\varepsilon)$ takové, že

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_\varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon),$$

tedy $\tilde{E}^n = 0$ uvnitř $K_{k,\varepsilon}$, $k = 1, \dots, N_0$. Existuje dostatečně malé $\varepsilon > 0$ takové, že

(32) $$\operatorname{mes} [(\vartheta - \Omega_\varepsilon) \cap E] > 0.$$

Pak můžeme psát

(33) $$\int_\vartheta (\tilde{E}^n - \tilde{E})^2 dx \geq \int_{E \cap (\vartheta - \Omega_\varepsilon)} (\tilde{E}^n - \tilde{E})^2 dx =$$

$$= \int_{E \cap (\vartheta - \Omega_\varepsilon)} (\tilde{E})^2 dx > 0.$$

Na druhé straně však z konvergence (29) a z Rellichovy věty plyne, že

$$\tilde{t}^n \to \tilde{t} \quad v \quad L^2(\Theta),$$

což je spor s (33). Tedy je $\tilde{t} = 0$ v $\Theta - \Omega_e$, a protože $\tilde{t} \in H^1(\Theta)$, máme

$$t \equiv \tilde{t}|_{\Omega_e} \in V(\Omega_e).$$

Dosadíme-li do (30), máme (pro libovolné $\varkappa$)

$$\int_{\Omega_e} a \nabla t \cdot \nabla w_\varkappa \, dx = -\int_{\partial\Omega_1} \alpha t \, w_\varkappa \, ds + \int_{\partial\Omega_0} g \, w_\varkappa \, ds - \int_{\Omega_e} a \nabla \vartheta_0 \cdot \nabla w_\varkappa \, dx .$$

V limitě pro $\varkappa \to 0$ odvodíme, že t splňuje stavovou rovnici (11) na oblasti Ω_e, tzn. $t = t(e)$,

(34) $$\tilde{t}^n \rightharpoonup \tilde{t}(e) \qquad \text{(slabě) v} \quad H^1(\Theta).$$

Nechť nyní $v \in V_p(\Omega_e)$. Když prodloužíme funkci $\underline{v}$ (např. ve smyslu Babiče-Nikolského - viz [3]) na oblast Θ, dostaneme, že

$$\tilde{v}|_{\Omega_n} \in V_p(\Omega_n) \qquad \forall n,$$

a platí

(35) $$\int_{\Omega_n} [\tau_{ij}(u^n)\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\, dx - k_0 t^n \operatorname{div} \tilde{v}] \, dx = \int_{\Omega_n} k_0 \vartheta_0 \operatorname{div} \tilde{v} \, dx .$$

Uvažujme diagonální podposloupnost $\{u^{D_n}\}$ a libovolnou oblast G_m. Máme (pak pro dost velké D_n)

$$(36)\quad \int_{\Omega_{D_n}} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx = \int_{G_m} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx +$$

$$+ \int_{\Omega_{D_n}-\Omega_e} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx + \int_{(\Omega_e - G_m)\cap\Omega_{D_n}} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx .$$

Podle (25) platí, že

$$\lim_{D_n\to\infty} \int_{G_m} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx = \int_{G_m} \tau_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx .$$

Dále je

$$\left| \int_{\Omega_{D_n}-\Omega_e} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx \right| \le C\, |u^{D_n}|_{\varepsilon,\Omega_{D_n}} \|\tilde{v}\|_{1,\Omega_{D_n}-\Omega_e}\, ,$$

$$\lim_{D_n\to\infty} (\operatorname{mes}(\Omega_{D_n}-\Omega_e)) = 0$$

$$(37)\quad |u^{D_n}|_{\varepsilon,\Omega_{D_n}} \le C_3$$

pro dostatečně velká n v důsledku (20).

Druhý člen na pravé straně (36) tedy konverguje pro $D_n \to \infty$ k nule.

Podobně pomocí (37) ukážeme, že

$$(38)\quad \left| \int_{(\Omega_e - G_m)\cap\Omega_{D_n}} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde{v})\,dx \right| \le C_0 \|\tilde{v}\|_{1,\Omega_e - G_m} .$$

Pak není těžké z (36), (37), (38) odvodit (např. postupně pomocí lim sup a lim. inf. levé strany)

$$(39)\quad \lim_{D_n\to\infty} \int_{\Omega_{D_n}} \tau_{ij}(u^{D_n})\,\varepsilon_{ij}(\tilde v)\,dx = \int_{\Omega_e} \tau_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(\tilde v)\,dx$$

Dále platí pro $n\to\infty$ na základě (34), (31)

$$(40)\quad \int_{\Omega_{D_n}} k_0 t^{D_n} \operatorname{div}\tilde v\,dx = \int_{\vartheta} k_0 \tilde t^{D_n} \operatorname{div}\tilde v\,dx \to \int_{\vartheta} k_0 \tilde t(e) \operatorname{div}\tilde v\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_e} k_0 t(e) \operatorname{div} v\,dx .$$

Konečně

$$(41)\quad \int_{\Omega_{D_n}} k_0 \vartheta_0 \operatorname{div}\tilde v\,dx \to \int_{\Omega_e} k_0 \vartheta_0 \operatorname{div} v\,dx .$$

Užijeme-li v rovnici (35) výsledků (39), (40), (41), dostaneme

$$\int_{\Omega_e} \tau_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx = \int_{\Omega_e} k_0\, t(e) \operatorname{div} v\,dx + \int_{\Omega_e} k_0 \vartheta_0 \operatorname{div} v\,dx .$$

Z jednoznačnosti řešení na podprostoru $V_p(\Omega_e)$ vyplývá, že $u = u(e)$.

Tvrzení Lemmatu je pak bezprostředním důsledkem (34) a (25).

Q.E.D.

<u>Lemma 13</u>. Nechť $e_n \to e$ v R^{3N_0}, $e_n \in U_{ad}$. Pak existuje podposloupnost $\{e_k\}$ taková, že

$$\liminf_{k\to\infty} j(e_k, u(e_k)) \geq j(e, u(e)) .$$

<u>Důkaz</u>. Pišme

$$I^2(\tau(u)) = Q(u)$$

(viz [1] - (14)).

Je-li

$$\lambda \geq 0\,,\ \mu \geq \mu_0 > 0 \quad \text{s.v.} \qquad \text{v oblasti } \mathcal{O}\,,$$

snadno odvodíme, že

(42) $$Q(u) \geq \mu_0 \sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_{ij}^2(u) \geq 0$$

a Q je kvadratická funkce ve složkách deformace ε_{ij}.

Můžeme tedy psát při $u^k \equiv u(a_k)\,,\ \Omega_{a_k} \equiv \Omega_k$:

(43) $$j(a_k, u^k) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_k}\int_{\Omega_k} Q(u^k)\,dx \geq \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_k}\int_{G_m} Q(u^k)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_a}\int_{G_m} Q(u^k)\,dx + \left(\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_k} - \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_a}\right)\int_{G_m} Q(u^k)\,dx.$$

První člen na pravé straně (43) je slabě zdola polospojitý funkcionál na $[H^1(G_m)]^2$ (neboť je konvexní díky (42) a diferencovatelný).

Z Lemmatu 1.2 tedy plyne

(44) $$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_a}\int_{G_m} Q(u^k)\,dx \geq \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_a}\int_{G_m} Q(u(a))\,dx\,.$$

Z nerovnosti (20) odvodíme dále, že pro všechna dost velká k platí

$$\left|\int_{G_m} Q(u^k)\,dx\right| \leq \left|\int_{\Omega_k} Q(u^k)\,dx\right| \leq C\,|u^k|^2_{\varepsilon,\Omega_k} \leq C\,C_3^2\,.$$

Poslední člen na pravé straně (43) lze tedy odhadnout v absolutní hodnotě výrazem

$$C_1 \left| \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega_k} - \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega_a} \right| ,$$

který konverguje k nule pro $k \to \infty$. Pomocí (43) a (44) tedy odvodíme

$$\liminf_{k \to \infty} j(a_k, u^k) \geq \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega_a} \int_{G_m} Q(u(a))\, dx .$$

Protože m bylo libovolné, můžeme přejít k limitě pro $m \to \infty$, a tak dostat tvrzení Lemmatu 1.3.

<u>Důkaz Věty 1.1.</u> Nechť $\{a_p\}$, $a_p \in U_{ad}$ je minimalizační posloupnost funkcionálu $J(a)$, tzn.

$$\lim_{p \to \infty} J(a_p) = \lim_{p \to \infty} j(a_p, u(a_p)) = \inf_{\eta \in U_{ad}} j(\eta, u(\eta)) .$$

Množina U_{ad} je omezená a uzavřená v R^{3N_0}, tedy kompaktní. Existuje tedy podposloupnost $\{a_n\} \subset \{a_p\}$ taková, že

$$a_n \to a \quad \text{v} \quad R^{3N_0}, \quad a \in U_{ad} .$$

Podle Lemmatu 1.3 existuje tedy podposloupnost $\{a_k\} \subset \{a_n\}$ taková, že

$$j(a, u(a)) \leq \liminf_{k \to \infty} j(a_k, u(a_k)) = \inf_{\eta \in U_{ad}} j(\eta, u(\eta)) .$$

Tedy a je řešením úlohy optimalizace. Q.E.D.

2. Existence řešení přibližné úlohy optimalizace

V této kapitole dokážeme, že přibližná úloha optimalizace, definovaná pomocí metody konečných prvků, má aspoň jedno řešení.

Připomeneme nejprve, jak jsme přibližnou úlohu definovali (srovnej [1] - kapitolu 2.2), ale poněkud pozměníme definici v souladu s (1) - (7) kapitoly 1. Budeme uvažovat čtyřúhelníkové isoparametrické prvky typu Q'_{21} i když v praxi je možné vést zcela analogický důkaz i pro jiné, např. trojúhelníkové prvky s jednou zakřivenou stranou.

Zavedeme pohyblivé sítě uzlů a příslušná dělení $\mathcal{T}_h(\alpha)$, $\alpha \in U_{ad}$, oblasti $\Omega_h(\alpha)$ tak, jak bylo uvedeno na začátku kapitoly 2.2 ve zprávě [1] . Množinu U_{ad} definujeme podle (5). Označme (při vynechání závislosti na α)

$$V_h = H_h(\Omega_h) \cap V(\Omega_h)$$

a hledáme řešení $\vartheta_h \in H_h(\Omega_h)$ 1. části přibližné stavové úlohy tak, aby $\vartheta_h - \vartheta_{oh} \in V_h$,

$$(45) \quad \int_{\Omega_h} a \nabla \vartheta_h \cdot \nabla w_h \, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha \vartheta_h w_h \, ds = \int_{\partial\Omega_{oh}} g w_h \, ds \qquad \forall w_h \in V_h ,$$

přičemž $\vartheta_{oh} \in H_h(\Omega_h)$ definujeme vždy tak, že $\vartheta_{oh} = \vartheta_o$ v uzlech na Γ_h a $\vartheta_{oh} = 0$ v ostatních uzlech.

Ve druhé části přibližné stavové úlohy hledáme $u_h \in V_p(\Omega_h)$ takovou, aby

$$(46) \quad \int_{\Omega_h} \tau_{ij}(u_h)\, \varepsilon_{ij}(v_h)\, dx = \int_{\Omega_h} k_o \vartheta_h \operatorname{div} v_h \, dx$$
$$\forall v_h \in V_p(\Omega_h) .$$

Konečně definujeme

$$j_h(\alpha, u_h(\alpha)) = (\text{mes}\, \Omega_h)^{-1} \int_{\Omega_h} I^2(\tau(u_h(\alpha)))\, dx$$

a přibližná úloha optimalizace zní:

najít $\alpha \in U_{ad}$, které minimalizuje $j_h(\alpha, u_h(\alpha))$,

tj.

$$j_h(\alpha, u_h(\alpha)) \le j_h(\eta, u_h(\eta)) \qquad \forall \eta \in U_{ad} .$$

Důkaz existence řešení této úlohy spočívá na dvou faktech:

(a) množina U_{ad} je kompaktní v prostoru R^{3N_0},

(b) funkce $\alpha \mapsto j_h(\alpha, u_h(\alpha))$ je spojitá na U_{ad}.

Abychom dokázali část (a), stačí si uvědomit, že U_{ad} je omezená a uzavřená v R^{3N_0}, což plyne přímo z její definice.

Důkaz spojitosti je mnohem obtížnější. Budeme používat několik pomocných lemmat.

Lemma 2.1. Nechť $\alpha_n \to \alpha$ v R^{3N_0} pro $n \to \infty$. Pak

(47) $$\Gamma_h(\alpha_n) \rightrightarrows \Gamma_h(\alpha),$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon),\ n > n(\varepsilon) \Longrightarrow$$

$$\Gamma_h(\alpha_n) \in \mathcal{O}(\Gamma_h(\alpha), \varepsilon),$$

kde $\mathcal{O}$ značí ε-okolí uzavřených křivek $\Gamma_h(\alpha)$.

Důkaz. Pišme zobrazení referenčního čtverce ve tvaru

(48) $$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta)\, x_i$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta)\, y_i ,$$

kde N_i jsou tvarové-bikvadratické-funkce a (x_i, y_i) souřadnice uzlových bodů na hranici čtyřúhelníkového prvku.

Budiž $A_n \in \Gamma_h(a_n)$ libovolný bod se souřadnicemi (x^n, y^n). Nechť je obrazem bodu $(\xi, -1)$ na hranici referenčního čtverce při zobrazení (48), kde však (x_i, y_i) nahradíme souřadnicemi (x_i^n, y_i^n). Bod $A \in \Gamma_h(a)$ nechť je obrazem téhož bodu při zobrazení (48).

Pak platí

$$\operatorname{dist}(A_n, \Gamma_h(a)) \leq \overline{A_n(\xi), A(\xi)} =$$

$$= \left[(x(\xi) - x_n(\xi))^2 + (y(\xi) - y_n(\xi))^2 \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{8} \| g_i - g_i^n \| ,$$

kde g_i jsou polohové vektory uzlových bodů, $g_i = (x_i, y_i)$ $g_i^n = (x_i^n, y_i^n)$. Protože $g_i^n \to g_i \ \forall i$, platí tvrzení lemmatu.

Lemma 2.2. Označme K_i, resp. K_i^n jednotlivé prvky $\mathcal{T}_h(a)$, resp. $\mathcal{T}_h(a_n)$, $x = F(\hat{x})$ zobrazení (48). Inverzní zobrazení $\hat{x} = F^{-1}(x)$ pišme ve tvaru

$$\xi = \xi(x, y),$$
$$\eta = \eta(x, y),$$

inverzní zobrazení $\hat{x} = F_n^{-1}(x)$ ve tvaru

$$\xi = \xi^n(x, y),$$
$$\eta = \eta^n(x, y).$$

Při $a_n \to a$ existuje soustava podoblastí $\{G_m^i\}$, $m = 1, 2, \ldots$, taková, že pro všechna i platí

$$G_m^i \subset K_i, \qquad G_m^i \to K_i \qquad \text{pro } m \to \infty, \ \forall i,$$

$$\forall m \; \exists n_0(m), \; n > n_0(m) \Rightarrow \bar{G}_m^i \subset K_i \cap K_i^n .$$

Pak platí pro $n \to \infty$

$$\frac{\partial \xi^n}{\partial x} \rightrightarrows \frac{\partial \xi}{\partial x}$$ (stejnoměrně) na každé G_m^i,

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \leq C \quad \text{na } K_i .$$

Důkaz plyne přímým výpočtem, užijeme-li vzorců

(49) $$\frac{\partial \xi^n}{\partial x} = \frac{\psi_\eta^n}{\phi_\xi^n \psi_\eta^n - \phi_\eta^n \psi_\xi^n} ,$$

kde ϕ^n, ψ^n jsou složky zobrazení $F_n(\hat{x}) : \hat{K} \to K_i^n$ a indexy značí parciální derivace.

Lemma 2.3. Označme

$$\hat{x}^n = F_n^{-1}(x) , \quad \hat{x} = F^{-1}(x) .$$

Na každé podoblasti G_m^i platí

$$\| \hat{x}^n - \hat{x} \| \to 0 .$$

Důkaz. Protože

$$\xi^n(F_n(F^{-1}(x)) - \xi(x) = \xi^n(F_n(x)) - \xi(x) = \xi(x) - \xi(x) = 0 ,$$

můžeme psát

$$|\xi^n(x) - \xi(x)| \leq |\xi^n(x) - \xi^n(F_n(F^{-1}(x))| + |\xi^n(F_n(F^{-1}(x)) - \xi(x)| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi^n}{\partial x_j}(\vartheta)(x_j - F_{nj}(\hat{x})) \right| \leq C(m) \sum_{j=1}^{2} |F_j(\hat{x}) - F_{nj}(\hat{x})| \to 0 .$$

Zde jsme využili omezenosti $\partial \xi^n / \partial x_j$ na G_m, plynoucí z Lemmatu 2.2.

 Sz.4405 V

Podobně lze odhadnout také $\eta^n(x)-\eta(x)$ a odtud plyne tvrzení Lemmatu.

Lemma 2.4. Nechť w^k, resp. $w^{(n)k}$ jsou bázové funkce podprostoru $H_h(a)$, resp. $H_h(a_n)$.

Pak na každém G_m^i platí

$$(50)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}(w^{(n)k}-w^k)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}(w^{(n)k}-w^k)\right| \rightrightarrows 0,$$

a kromě toho

$$(51)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x} w^{(n)k}\right| \le C \qquad \text{na } \Omega_h(a_n)\ \forall\, n .$$

Důkaz. Pro $x \in G_m^i$ platí

$$(52)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}(w^{(n)k}-w^k)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[N(F_n^{-1}(x)) - N(F^{-1}(x))\right]\right| \le$$

$$\le \left| N_\xi(\hat{x}^n)\cdot\frac{\partial \xi^n}{\partial x} + N_\eta(\hat{x}^n)\frac{\partial \eta^n}{\partial x} - N_\xi(\hat{x})\frac{\partial \xi}{\partial x} - N_\eta(\hat{x})\frac{\partial \eta}{\partial x}\right| \le \left|(N_\xi(\hat{x}^n) - N_\xi(\hat{x}))\frac{\partial \xi^n}{\partial x} + N_\xi(\hat{x})\left(\frac{\partial \xi^n}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right| + \left|\ldots\ldots\right|,$$

$$(53)\qquad \left|N_\xi(\hat{x}^n) - N_\xi(\hat{x})\right| = \left|\nabla_{\hat{x}} N(\vartheta)\cdot(\hat{x}^n - \hat{x})\right| \le C\,\|\hat{x}^n - \hat{x}\| \to 0,$$

kde jsme využili Lemmatu 2.3. Dosadíme-li do (52) a použijeme také Lemmatu 2.2, vyplývá odtud (50).

Abychom dokázali (51), pišme nejprve

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} w^{(n)k}\right| = \left|N_\xi \frac{\partial \xi^n}{\partial x} + N_\eta \frac{\partial \eta^n}{\partial x}\right| \leq C\left(\left|\frac{\partial \xi^n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \eta^n}{\partial x}\right|\right)$$

a užijeme toho, že zlomek ve vzorci (49) lze omezit v absolutní hodnotě shora konstantou.

Lemma 2.5. Na každém prvku $K_i \in \mathcal{T}_h(a)$ platí

$$\int_{K_i} \left(\frac{\partial}{\partial x}(w^{(n)k} - w^k)\right)^2 dx \to 0 . \tag{54}$$

Důkaz. V vyšetřovaný integrál se rovná součtu

$$\int_{G^i_m} (\quad)^2 dx + \int_{K_i - G^i_m} (\quad)^2 dx . \tag{55}$$

Druhý integrál konverguje k nule pro $m \to \infty$ vzhledem k tomu, že integrand je omezený díky (51).

Prvý integrál konverguje k nule na základě (50).

Lemma 2.6. Nechť $\widetilde{w}^k$, resp. $\widetilde{w}^{(n)k}$ jsou bázové funkce prostoru $H_h(\Omega_h(a))$, resp. $H_h(\Omega_h(a_n))$, prodloužené na oblast ϑ. Potom pro všechna k platí

$$\| \widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k \|_{0,\vartheta} \to 0 .$$

Důkaz. Nechť $K_i \subset \operatorname{supp} \widetilde{w}^k$. Pro $x \in K_i \cap K_i^{(n)}$ platí

$$| \widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k | = | N(\hat{x}^n) - N(\hat{x}) | \leq | \nabla N(\vartheta) | \cdot \| \hat{x}^n - \hat{x} \| . \tag{56}$$

Pišme $\delta_n = \widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k$,

$$\int_{K_i} \delta_n^2 dx = \int_{G^i_m} \delta_n^2 dx + \int_{K_i - G^i_m} \delta_n^2 dx . \tag{57}$$

Integrál přes $K_i - G_m^i$ konverguje pro $m \to \infty$ k nule, neboť $|\delta_n| \leq C$. Integrál přes G_m^i konverguje k nule pro $n \to \infty$, jak vyplývá z (56) a Lemmatu 2.3. Je tedy

(58) $$\lim_{n \to \infty} \int_{K_i} \delta_n^2 \, dx = 0 .$$

Dále platí

(59) $$\int_{\vartheta - \operatorname{supp} \tilde{w}^k} \delta_n^2 \, dx = \int_{\vartheta - \operatorname{supp} \tilde{w}^k} |\tilde{w}^{(n)k}|^2 \, dx \leq C \operatorname{mes} E_n ,$$

kde

$$E_n = (\vartheta - \operatorname{supp} \tilde{w}^k) \cap \operatorname{supp} \tilde{w}^{(n)k} .$$

Avšak zřejmě

(60) $$\operatorname{mes} E_n \to 0 .$$

Kombinací (58), (59) a (60) odvodíme tvrzení lemmatu.

Q.E.D.

Nyní budeme vyšetřovat spojitost prvků matic "tuhosti" odpovídajících úloze (45) a (46) na $\Omega_h(a_n) \equiv \Omega_n$, při přechodu $a_n \to a$.

Píšeme $t^{(n)} + \vartheta_{oh}^{(n)} = \vartheta^{(n)}$,

(61) $$t^{(n)} = \sum_{k=1}^{K} T_k^{(n)} w^{(n)k} ,$$

(62) $$\vartheta_{oh}^{(n)} = \sum_{k \in F^{(n)}} \vartheta_o \, w^{(n)k} ,$$

kde $F^{(n)}$ je množina uzlů ležících na $\Gamma_h(a_n)$.

Potom máme

$$(63)\quad \int_{\Omega_n} a \sum_k T_k^{(n)} \nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j}\, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha \sum_k T_k^{(n)} w^{(n)k} w^{(n)j}\, ds =$$

$$= \sum_k T_k^{(n)} \Big(\int_{\Omega_n} a \nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j}\, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha w^{(n)k} w^{(n)j}\, ds \Big) =$$

$$= \sum_k A_{kj}^{(n)} T_k^{(n)} .$$

Lemma 2.7

$$(64)\quad \int_{\Omega_n} a \nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j}\, dx - \int_{\Omega} a \nabla w^k \cdot \nabla w^j\, dx =$$

$$= \int_{\Omega} a \left(\nabla \delta_n w^k \cdot \nabla w^j + \nabla w^k \cdot \nabla \delta_n w^j \right) dx +$$

$$+ \sum_i \sum_r \int_{K_i} \delta_n q^r \cdot \nabla \left[w^r (a \nabla w^k \cdot \nabla w^j) \right] dx + O(\delta_n a),$$

kde

$$\delta_n w^k = w^{(n)k} - w^k \qquad \forall k,$$

$$\delta_n a = a_n - a, \quad \delta_n q^r = q^{(n)r} - q^r,$$

q^r jsou uzly triangulace $\mathcal{T}_h(a)$, $q^{(n)r}$ uzly $\mathcal{T}_h(a_n)$.

Důkaz - viz Pironneau [4] (Proposition 5, str. 179).

Z Lemmatu 2.5 plyne, že prvý integrál na pravé straně (64) konverguje k nule. Další člen konverguje rovněž k nule, neboť

$$\delta_n q^r \to 0 .$$

Máme tedy

$$(65)\quad \left| \int_{\Omega_n} a \nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j} dx - \int_{\Omega} a \nabla w^k \cdot \nabla w^j dx \right| \to 0 .$$

Protože však
$$w^{(n)k} = w^k \quad \text{na} \quad \partial\Omega_1 ,$$

z (65) vyplývá

$$(66)\quad A^{(n)}_{kj} \to A_{kj} .$$

Na pravé straně systému lineárních rovnic
$$A^{(n)}_{kj} T^{(n)}_j = b^{(n)}_k$$

úlohy (45) bude člen

$$b^{(n)}_k = \int_{\partial\Omega_{oh}} g w^{(n)k} ds - \int_{\Omega_n} a \nabla \vartheta^{(n)}_{oh} \cdot \nabla w^{(n)k} dx - \int_{\partial\Omega_1} \alpha \vartheta^{(n)}_{oh} w^{(n)k} ds =$$

$$= \int_{\partial\Omega_{oh}} g w^k ds - \int_{\Omega_n} a \nabla \vartheta^{(n)}_{oh} \cdot \nabla w^{(n)k} dx .$$

Zde jsme dosadili
$$w^{(n)k} = w^k \quad \text{na} \quad \partial\Omega_{oh} ,$$

$$\vartheta^{(n)}_{oh} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_1 .$$

Použijeme-li rozvoje (62) a výsledku (65), dostaneme

$$\left| \sum_{j \in F^{(n)}} \int_{\Omega_n} a \vartheta_o \nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j} dx - \sum_{j \in F} \int_{\Omega} a \vartheta_o \nabla w^k \cdot \nabla w^j dx \right| \leq$$

 Sz.4405 V

$$\leq |\vartheta_0| \sum_{j\in F} \left| \int_{\Omega_n} a\nabla w^{(n)k} \cdot \nabla w^{(n)j} dx - \int_{\Omega} a\nabla w^k \cdot \nabla w^j dx \right| \to 0 .$$

je tedy

(67) $$b_k^{(n)} \to b_k$$

Prodlužme všechny funkce $t^{(n)}, t, w^{(n)k}, w^k$ nulou na oblast Θ a označme prodloužené funkce pruhem, tedy $\bar{t}^{(n)}, \bar{t}, \bar{w}^{(n)k}, \bar{w}^k$. Pak platí

Lemma 2.8. Platí

$$\int_{\Theta} (\bar{t}^{(n)} - \bar{t})^2 dx \to 0 .$$

Důkaz. Můžeme psát

$$|\bar{t}^{(n)} - \bar{t}| = \left| \sum_k (T_k^{(n)} \bar{w}^{(n)k} - T_k \bar{w}^k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_k |T_k^{(n)} - T_k| |\bar{w}^{(n)k}| + \sum_k |T_k| |\bar{w}^{(n)k} - \bar{w}^k| .$$

Máme tedy

(68) $$\int_{\Theta} (\bar{t}^{(n)} - \bar{t})^2 dx \leq 2\left(\sum_k |T_k^{(n)} - T_k|^2\right) \int_{\Theta} \sum_k (\bar{w}^{(n)k})^2 dx +$$

$$+ 2\left(\sum_k |T_k|^2\right) \int_{\Theta} \sum_k (\bar{w}^{(n)k} - \bar{w}^k)^2 dx .$$

Z Lemmatu 2.6 a (66), (67) plyne, že

(69) $$\int_{\Theta} \sum_k (\bar{w}^{(n)k})^2 dx < C \qquad \forall n$$

(70) $$T_k^{(n)} \to T_k .$$

Podobně z Lemmatu 2.6 plyne, že i poslední člen na pravé straně (68) konverguje k nule. C.B.D.

Vyšetřujme nyní rovnici (46). Dosadíme-li

$$u^{(n)} = \sum_k U_k^{(n)} \underset{\sim}{w}^{(n)k} , \quad \underset{\sim}{w}^{(n)k} = \begin{pmatrix} w^{(n)k} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} 0 \\ w^{(n)k} \end{pmatrix} ,$$

na levé straně (46) bude

$$\int_{\Omega_n} \tau_{is}(u^{(n)})\, \varepsilon_{is}(\underset{\sim}{w}^{(n)j})\, dx = \sum_k U_k^{(n)} \int_{\Omega_n} \tau_{is}(\underset{\sim}{w}^{(n)k})\, \varepsilon_{is}(\underset{\sim}{w}^{(n)j})\, dx =$$

$$= \sum_k \mathcal{A}_{kj}^{(n)}\, U_k^{(n)} .$$

Můžeme dále rozepsat

$$\mathcal{A}_{kj}^{(n)} = \int_{\Omega_n} c_{ismr} \frac{\partial w_i^{(n)k}}{\partial x_s} \frac{\partial w_m^{(n)j}}{\partial x_r}\, dx ,$$

kde $i, s, m, r = 1, 2$ a c_{ismr} jsou dané konstanty.

Zcela analogicky, jak jsme odvodili (66), lze odvodit, že

(71) $$\mathcal{A}_{kj}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{A}_{kj} .$$

Na pravé straně (46) bude

(72) $$\int_{\Omega_n} k_0 (\vartheta_{oh}^{(n)} + t^{(n)})\, \mathrm{div}\, \underset{\sim}{w}^{(n)j}\, dx = \mathcal{B}_j^{(n)} .$$

Nejprve odvodíme

<u>Lemma 2.9</u>. Prodloužíme-li $\vartheta_{oh}^{(n)}$ konstantou spojitě na oblast ϑ pak pro prodloužené funkce $\tilde{\vartheta}_{oh}^{(n)}$ platí

$$\| \tilde{\vartheta}_{oh}^{(n)} - \tilde{\vartheta}_{oh} \|_{0,\vartheta} \longrightarrow 0 .$$

<u>Důkaz</u>. Můžeme psát

$$\tilde{\vartheta}_{oh}^{(n)} = \sum_{k \in \tilde{F}^{(n)}} \vartheta_0\, \tilde{w}^{(n)k}$$

 Sz.4405 V

kde $\widetilde{F}^{(n)}$ je množina uzlů na $\Gamma_h^{(e_n)}$ i uvnitř $\Theta - \Omega_n$ a označme $\widetilde{F}$ příslušnou množinu na $\Gamma_h^{(e)}$ a uvnitř $\Theta - \Omega$. Máme tedy

$$|\widetilde{\vartheta}_{oh}^{(n)} - \widetilde{\vartheta}_{oh}|^2 = |\sum_{k\in\widetilde{F}} \vartheta_o (\widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k)|^2 \le$$

$$\le C\vartheta_o^2 \sum_{k\in\widetilde{F}} |\widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k|^2 ,$$

$$\int_\Theta |\widetilde{\vartheta}_{oh}^{(n)} - \widetilde{\vartheta}_{oh}|^2 dx \le C\vartheta_o^2 \sum_{k\in\widetilde{F}} \|\widetilde{w}^{(n)k} - \widetilde{w}^k\|_{0,\Theta}^2$$

a tvrzení Lemmatu vyplývá nyní z Lemmatu 2.6.

Odhadneme rozdíl

$$|\mathcal{B}_j^{(n)} - \mathcal{B}_j| = |\int_{\Omega_n} k_o(\vartheta_{oh}^{(n)} + t^{(n)}) \operatorname{div} w^{(n)j}\, dx - \int_\Omega k_o(\vartheta_{oh} + t) \operatorname{div} \widetilde{w}^j dx| \le$$

$$\le |\int_{\Omega_h \cap \Omega} [k_o(\vartheta_{oh}^{(n)} + t^{(n)}) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j} - k_o(\vartheta_{oh} + t) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j} +$$

$$+ k_o(\vartheta_{oh} + t)(\operatorname{div}(\underset{\sim}{w}^{(n)j} - \underset{\sim}{w}^j)] dx + |\int_{\Omega_n - \Omega} k_o(\vartheta_{oh}^{(n)} + t^{(n)}) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j} dx -$$

$$- k_o(\vartheta_{oh} + t) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^j dx| \le |\int_{\Omega_n \cap \Omega} k_o(\vartheta_{oh}^{(n)} - \vartheta_{oh} + t^{(n)} - t) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j} dx| +$$

$$+ |\int_{\Omega_n \cap \Omega} k_o(\vartheta_{oh} + t) \operatorname{div}(\underset{\sim}{w}^{(n)j} - \underset{\sim}{w}^j)\, dx| + |\int_{\Omega_n - \Omega} k_o(\vartheta_{oh}^{(n)} + t^{(n)}) \cdot$$

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j} dx| + |\int_{\Omega - \Omega_n} k_o(\vartheta_{oh} + t) \operatorname{div} \underset{\sim}{w}^j dx| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

Odhadneme postupně jednotlivé sčítance.

$$I_1 \leq C(\|\vartheta_{oh}^{(n)} - \vartheta_{oh}\|_{0,\Omega_n \cap \Omega} + \|t^{(n)} - t\|_{0,\Omega_n \cap \Omega})\|\operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j}\|_{0,\Omega_n \cap \Omega} .$$

Protože však

$$\|\vartheta_{oh}^{(n)} - \vartheta_{oh}\|_{0,\Omega_n \cap \Omega} \leq \|\tilde{\vartheta}_{oh}^{(n)} - \tilde{\vartheta}_{oh}\|_{0,\vartheta} \to 0$$

$$\|t^{(n)} - t\|_{0,\Omega_n \cap \Omega} \leq \|\bar{t}^{(n)} - \bar{t}\|_{0,\vartheta} \to 0$$

v důsledku Lemmat 2.9 a 2.8 a máme

$$\|\operatorname{div} \underset{\sim}{w}^{(n)j}\|_{0,\Omega_n \cap \Omega} \leq C$$

v důsledku (51) z Lemmatu 2.4, je $I_1 \to 0$.

$$I_2 \leq \sum_i \Big| \int_{G_m^i} k_0(\vartheta_{oh} + t)\operatorname{div}(\underset{\sim}{w}^{(n)j} - \underset{\sim}{w}^j)\,dx \Big| +$$

$$+ \sum_i \Big| \int_{K_i - G_m^i} k_0(\vartheta_{oh} + t)\operatorname{div}(\underset{\sim}{w}^{(n)j} - \underset{\sim}{w}^j)\,dx \Big| .$$

Z (51) plyne, že druhý sčítanec konverguje k nule pro $m \to \infty$.

Z Lemmatu 2.4 (50) vyplývá, že prvý člen konverguje k nule.

Tedy $I_2 \to 0$.

Dále máme

$$I_3 \leq k_0(\|\tilde{\vartheta}_{oh}^{(n)}\|_{0,\vartheta} + \|\bar{t}^{(n)}\|_{0,\vartheta}) \cdot C \operatorname{mes}(\Omega_n - \Omega) \to \Omega$$

Sz.4405 V

na základě (51) z Lemmatu 2.4 a Lemmat 2.9, 2.8.

Konečně

$$I_4 \leq k_0 \| \vartheta_{oh} + t \|_{0,\Omega} \| \mathrm{div}\, \underset{\sim}{w}^{i} \|_{0,\Omega-\Omega_n} \to 0,$$

protože $\mathrm{mes}\,(\Omega - \Omega_n) \to 0$.

Máme tedy

(73) $$\mathcal{B}_j^{(n)} \to \mathcal{B}_j .$$

Protože $u^{(n)}$ hledáme v prostoru $V_p(\Omega_h(e_n))$ kromě soustavy rovnic

$$\sum_k \mathcal{A}_{kj}^{(n)} \cdot U_k^{(n)} = \mathcal{B}_j^{(n)},$$

uvažujeme ještě doplňující 3 podmínky na části $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_1$ (viz (3)).
Protože však

$$\underset{\sim}{w}^{(n)k} = \underset{\sim}{w}^{k} \quad \text{na } \Gamma_1,$$

koeficienty těchto doplňkových podmínek jsou nezávislé na n.
Celkem tedy ze vztahů (71), (73) vyplývá, že pro řešení doplněné soustavy platí

(74) $$U_k^{(n)} \to U_k .$$

Připomeneme označení

$$u^{(n)} = \sum_k U_k^{(n)} \underset{\sim}{w}^{(n)k}, \quad u = \sum_k U_k \underset{\sim}{w}^{k}.$$

<u>Lemma 2.10.</u> Pro každou oblast

$$G_m = \left\{ x \in \Omega_h(e) : \mathrm{dist}\,(x, \Gamma_h(e)) > \frac{1}{m} \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

platí

$$\int\limits_{G_m} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^{(n)} - u_i)^2 dx \to 0 .$$

Důkaz. Máme především

$$\int\limits_{G_m} [\sum_k (U_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k} - U_k \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^k)]^2 dx \leq$$

$$\leq C \int\limits_{G_m} \sum_k (U_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k} - U_k \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^k)^2 dx ,$$

a na základě Lemmatu 2.4 a (74) odvodíme

$$\int\limits_{G_m} [U_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k} - U_k \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k}) + U_k (\frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k} - \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^k)]^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_{G_m} (U_k^{(n)} - U_k)^2 |\frac{\partial}{\partial x_j} w_i^{(n)k}|^2 + 2 \int\limits_{G_m} U_k^2 [\frac{\partial}{\partial x_j}(w_i^{(n)k} -$$

$$- w_i^k)]^2 dx \to 0 .$$

Konečně přistoupíme k důkazu spojitosti účelového funkcionálu. Máme (viz důkaz Lemmatu 1.3)

$$j_h(e_n, u^{(n)}) = (\mathrm{mes}\, \Omega_n)^{-1} \int\limits_{\Omega_n} Q(u^{(n)})\, dx ,$$

$$j_h(e, u) = (\mathrm{mes}\, \Omega)^{-1} \int\limits_{\Omega} Q(u)\, dx .$$

$$(75)\quad |j_h(a_n, u^{(n)}) - j_h(a,u)| \leq |(\text{mes}\,\Omega_n)^{-1}\Big[\int_{\Omega_n} Q(u^n)\,dx - \int_{\Omega} Q(u)\,dx\Big]| + |(\text{mes}\,\Omega_n)^{-1} - (\text{mes}\,\Omega)^{-1}|\,|\int_{\Omega} Q(u)\,dx|\,.$$

Jelikož $\text{mes}\,\Omega_n \to \text{mes}\,\Omega$, druhý člen na pravé straně konverguje k nule.

Odhadněme prvý člen. Pro všechna n můžeme položit zřejmě

$$\text{mes}\,\Omega_n > \frac{1}{2}\,\text{mes}\,\Omega,$$

tedy

$$(76)\quad (\text{mes}\,\Omega_n)^{-1} \leq 2/\text{mes}\,\Omega = C.$$

Pišme

$$\int_{\Omega_n} Q(u^n)\,dx = \int_{G_m} Q(u^n)\,dx + \int_{\Omega_n - G_m} Q(u^n)\,dx$$

$$\int_{\Omega} Q(u)\,dx = \int_{G_m} Q(u)\,dx + \int_{\Omega - G_m} Q(u)\,dx,$$

tedy

$$|\int_{\Omega_n} Q(u^n)\,dx - \int_{\Omega} Q(u)\,dx| \leq |\int_{G_m} [Q(u^n) - Q(u)\,dx| + \int_{\Omega_n - G_m} Q(u^n)\,dx + \int_{\Omega - G_m} Q(u)\,dx = I_1 + I_2 + I_3$$

Z Lemmatu 2.10 plyne, že

(77) $I_1 \to 0$.

Protože

$$mes(\Omega - G_m) \to 0 \qquad \text{pro} \quad m \to 0,$$

je

(78) $$I_3 \to 0 \qquad \text{pro} \quad m \to 0 .$$

Pro I_2 můžeme psát odhad

$$I_2 = \int_{\Omega_n - G_m} Q(u^n)\,dx \leq C \int_{\Omega_n - G_m} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right)^2 dx .$$

Vzhledem k (74) a Lemmatu 2.4 (51) platí

$$\left|\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}\right| = \left|\sum_k U_k^{(n)} \frac{\partial w_i^{(n)k}}{\partial x_j}\right| \leq \sum_k |U_k^{(n)}| \left|\frac{\partial w_i^{(n)k}}{\partial x_j}\right| \leq C .$$

Odtud vyplývá, že

(79) $$I_2 \leq C_1\, mes(\Omega_n - G_m) \leq C_1 [mes(\Omega_n - \Omega) + mes(\Omega - G_m)] \to$$
$$\to 0$$

$$\text{pro } n \to \infty,\ m \to \infty .$$

Kombinací (77), (78), (79) vyplývá

$$\int_{\Omega_n} Q(u^n)\,dx \to Q(u)\,dx .$$

Dosadíme-li spolu s (76) do (75), vychází

$$j_h(a_n, u^{(n)}) \longrightarrow j_h(a, u),$$

čímž je důkaz spojitosti zakončen.

Q.E.D.

Sz.4405 V

3. Aproximace úlohy identifikace

Studium konvergence diskrétních modelů

Formulujeme tento indentifikační problém:

buď $U_{ad} \subset L^2(\partial\Omega_0)$ konvexní, uzavřená podmnožina (rozdělení hranice $\partial\Omega$ na $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1$ a Γ je dáno obr. 2), definovaná vztahem

$$U_{ad} = \left\{ \gamma \in L^\infty(\partial\Omega_0) \mid \|\gamma\|_{\infty,\partial\Omega_0} \leq c_1 ; \int_{\partial\Omega_0} \gamma \, ds \leq c_2 \right\},$$

kde c_1, c_2 jsou dané konstanty.

Pro danou pevnou $\gamma \in U_{ad}$ definujeme stavový problém:

$$(\mathcal{P}(p)) \quad \begin{cases} \text{nalézt } \vartheta = \vartheta(\gamma) \in V(\Omega \setminus \Omega_0) \text{ tak, aby} \\ a(\vartheta(\gamma), w) = (\gamma, w) \qquad \forall w \in V(\Omega \setminus \Omega_0), \end{cases}$$

kde

$$V(\Omega \setminus \Omega_0) = \{ w \in H^1(\Omega \setminus \Omega_0) \mid w = 0 \text{ na } \Gamma \},$$

$$a(\vartheta(\gamma), w) \equiv \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \tilde{\alpha} \nabla\vartheta \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha \vartheta \cdot w \, ds,$$

$$\tilde{\alpha} \in L^\infty(\Omega \setminus \Omega_0)$$
$$\alpha \in L^\infty(\partial\Omega_0)$$

$$\tilde{\alpha} \geq 0, \ \alpha \geq 0,$$
$$(\gamma, w) = \int_{\partial\Omega_0} \gamma w \, ds.$$

 Sz.4405 V

Účelový funkcionál $\mathcal{J}$ definujeme výrazem

$$\mathcal{J}(\gamma) = \tfrac{1}{2}\,\|\vartheta(\gamma) - z_d\|^2_{1,\Omega\setminus\Omega_0}$$

kde $\vartheta(\gamma)$ je řešení $(\mathcal{P}(\gamma))$ a $z_d \in H^1(\Omega\setminus\Omega_0)$ je daný pevný prvek.

Úlohou identifikace pravé strany rozumíme úlohu

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \text{nalézt } g \in U_{ad} \text{ tak, aby} \\ \mathcal{J}(g) \le \mathcal{J}(\gamma) \quad \forall \gamma \in U_{ad} \end{cases}$$

__Věta 3.1.__ Existuje alespoň jedno řešení úlohy $(\mathbb{P})$

__Důkaz.__ Označme

$$q = \inf_{\gamma \in U_{ad}} \mathcal{J}(\gamma)$$

a buď $\gamma_n \in U_{ad}$ odpovídající minimizační posloupnost, tj.

$$(1) \qquad q = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\gamma_n)$$

Zřejmě $\{\gamma_n\}$ je omezená v normě prostoru $L^2(\partial\Omega_0)$ a existuje vybraná posloupnost (značíme ji stejně) a prvek $\gamma^* \in L^2(\partial\Omega_0)$ takový, že

$$(2) \qquad \gamma_n \to \gamma^* \quad \text{(slabě) v} \quad L^2(\partial\Omega_0).$$

Z definice U_{ad} plyne, že $\gamma^* \in U_{ad}$. Nechť $\vartheta_n = \vartheta_n(\gamma_n)$ je řešení úlohy $(\mathcal{P}(\gamma_n))$ tj.

$$(3) \qquad a(\vartheta_n, w) = (\gamma_n, w) \qquad \forall w \in V(\Omega\setminus\Omega_0)$$

Z (3) plyne, že $\|\vartheta_n\|_{1,\Omega\setminus\Omega_0}$ je omezená a proto existuje vybraná posloupnost (opět ji značíme stejně) a prvek $\vartheta^* \in V(\Omega\setminus\Omega_0)$ takový, že

$$(4) \qquad \vartheta_n \to \vartheta^* \quad \text{(slabě) ve} \quad V(\Omega\setminus\Omega_0).$$

Sz.4405 V

odtud, s využitím (2) plyne limitním přechodem v (3), že ϑ^* je řešením úlohy $(\mathcal{P}(\gamma^*))$. Ze slabé zdola polospojitosti cenového funkcionálu a z (1) plyne:

$$q = \liminf_{n \to \infty} J(\gamma_n) \geq J(\gamma^*)$$

neboli γ^* je jedno z řešení úlohy $(\mathbb{P})$.

Ekvivalentní charakterizace řešení úlohy

Protože se jedná o úlohu konvexního programování, je $q \in U_{ad}$ řešením $(\mathbb{P})$ právě tehdy, když

$$(P)' \qquad J'(q)(\gamma - q) \geq 0 \qquad \forall \gamma \in U_{ad}.$$

Spočteme $J'(q)\gamma$. Přímým výpočtem zjistíme, že

$$(5) \qquad J'(q)\gamma = (\vartheta(q) - z_d \, ; \, \vartheta'(q)\gamma)_{H^1(\Omega \setminus \Omega_0)}.$$

Přitom $\vartheta'(q)\gamma$ značí derivaci řešení ϑ v bodě q a ve směru γ. Snadno zjistíme, že $\vartheta'(q)\gamma \in V(\Omega \setminus \Omega_0)$ že řešením úlohy

$$(6) \qquad a(\vartheta'(q)\gamma, w) = (\gamma, w) \qquad \forall w \in V(\Omega \setminus \Omega_0).$$

Buď $p \in V(\Omega \setminus \Omega_0)$ řešením úlohy:

$$(7) \qquad a(p, w) = (\vartheta(q) - z_d \, ; w)_{H^1(\Omega \setminus \Omega_0)} \qquad \forall w \in V(\Omega \setminus \Omega_0).$$

Dosazením funkce $\vartheta'(q)\gamma$ za w v (7), s využitím (5), (6) dostaneme

$$(8) \qquad J'(q)\gamma = (\gamma, p).$$

Sz.4405 V

Poznámka 3.1. Funkci p nazveme adjungovaným stavem úlohy $(\mathbb{P})$.

Aproximace úlohy $(\mathbb{P})$

Protože $\Omega\setminus\Omega_0$ je oblast, jejíž hranice není složena z přímých úseků, budeme v dalším k její aproximaci užívat krivočaré konečné prvky. Toto motivuje další (prozatím obecný) postup. Z důvodů jednoduchosti značení položme $Q \equiv \Omega\setminus\Omega_0$. Buď Q_h systém aproximujících množin takových, že

(9) $$\partial Q_h \rightrightarrows \partial Q \quad \text{(stejnoměrně)} .$$

Symboly Γ_h resp. $\partial\Omega_0^h$ označíme ty části ∂Q_h, jež aproximují Γ resp. $\partial\Omega_0$. Buď $S_h(\partial\Omega_0^h)$ konečně-dimenzionální prostor funkcí, definovaných na $\partial\Omega_0^h$ a položme

$$U_{ad}^h = \left\{ \gamma_h \in S_h(\partial\Omega_0^h) \setminus \|\gamma_h\|_{\infty,\partial\Omega_0^h} \leq c_1,\ \int_{\partial\Omega_0^h} \gamma_h \, ds \leq c_2 + \eta(h) \right\},$$

kde $\eta(h) \to 0$, když $h \to 0$.

Buď dále $V_h(Q_h)$ konečně-dimensionální podprostor prostoru $V(Q_h)$, kde

$$V(Q_h) = \left\{ v \in H^1(Q_h) \setminus v = 0 \ \text{na}\ \Gamma_h \right\}.$$

Aproximací úlohy $(\mathbb{P})$ nazveme úlohu

$$(\mathbb{P}_h) \quad \begin{cases} \text{nalézt } g_h \in U_{ad}^h \text{ takový, že} \\ J_h(g_h) \leq J_h(\gamma_h) \quad \forall \gamma_h \in U_{ad}^h , \end{cases}$$

kde

$$J_h(\gamma_h) = 1/2 \, \| \vartheta_h(\gamma_h) - z_d \|^2_{1,Q_h}, \quad \gamma_h \in U_{ad}^h \quad \text{a}$$

$$\vartheta_h(\gamma_h) = u_h(\gamma_h) + \vartheta_{0h} \in V_h(Q_h) + \vartheta_{0h}$$

je řešením aproximované stavové úlohy:

Sz.4405 V

$$(\mathcal{P}(\gamma_h))_h \quad a_h(u_h(\gamma_h), \varphi_h) = (\gamma_h, \varphi_h)_h - a_h(\vartheta_{oh}, \varphi_h) \qquad \forall \varphi_h \in V_h(Q_h).$$

Přitom

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{Q_h} \tilde{a}\, \nabla u_h \nabla v_h \, dx + \int_{\partial\Omega_1} \alpha u_h v_h \, ds ,$$

$$(\gamma_h, \varphi_h)_h = \int_{\partial\Omega_0^h} \gamma_h \varphi_h \, ds$$

(nezapomeňme, že $\partial\Omega_1$ je složena pouze z přímých úseků a tedy k žádné aproximaci části $\partial\Omega_1$ nedochází), ϑ_{oh} je vhodnou aproximací funkce ϑ_o, jež nám realizuje okrajové podmínky.

Obdobně jako ve spojitém případě můžeme dokázat, že $(\mathbb{P})_h$ má alespoň jedno řešení. Platí:

Věta 3.2. Úloha $(\mathbb{P})_h$ má pro každé $h > 0$ alespoň jedno řešení.

Důkaz je analogií spojitého případu.

Rovněž tak charakterizace řešení úlohy $(\mathbb{P})_h$, za pomoci zavedení aproximovaného adjungovaného stavu je možná. Platí totiž, že $g_h \in U_{ad}^h$ je řešením úlohy $(\mathbb{P})_h$ právě tehdy, když

$$(\mathbb{P})_h' \qquad J_h'(g_h)(\gamma_h - g_h) \geq 0 \qquad \forall \gamma_h \in U_{ad}^h .$$

Přitom

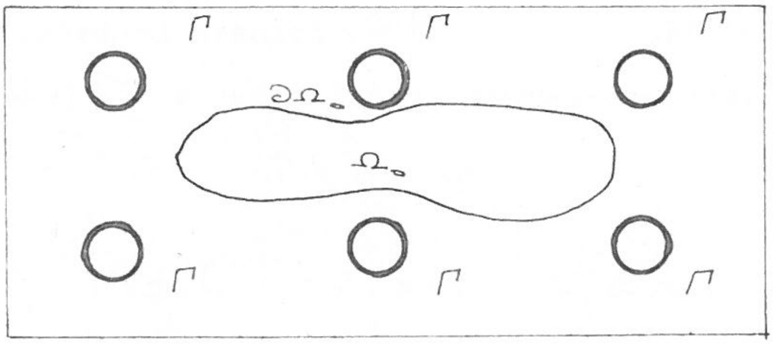
$$J_h'(g_h)\gamma_h = (\gamma_h, p_h)_h ,$$

kde $p_h \in V_h(Q_h)$ je řešením diskrétní okrajové úlohy

$$a_h(p_h, w_h) = (\vartheta_h(g_h) - z_d ; w_h)_{H^1(Q_h)} \quad \forall w_h \in V_h(Q_h)$$

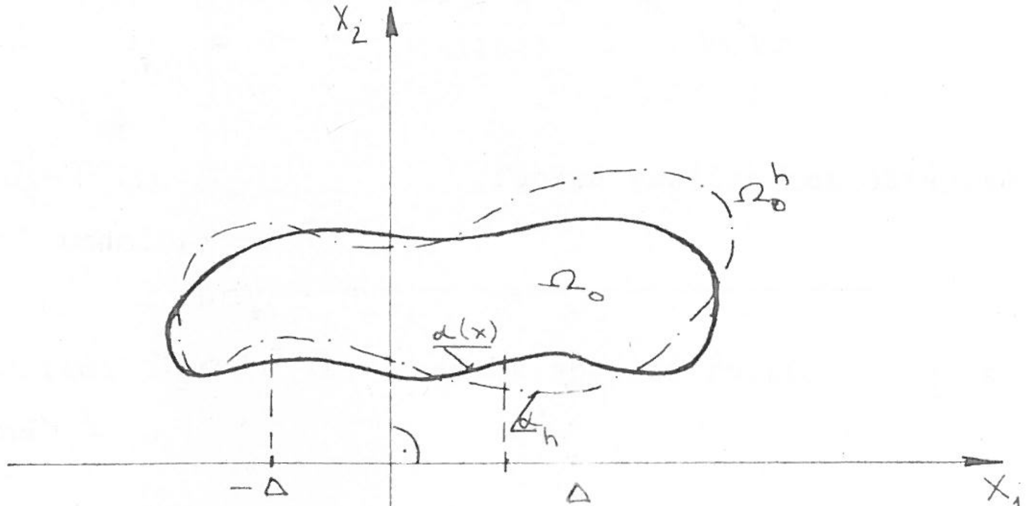
V dalším budeme studovat vzájemný vztah mezi úlohami $(\mathbb{P})$ a $(\mathbb{P})_h$. Za tím účelem zavedeme další značení a uvedeme nové hypothésy.

Buď $\tilde{\Omega} \subset R_2$ taková, že $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega \setminus \Omega_o}$ (za $\tilde{\Omega}$ můžeme vzít např. obdélník, ohraničený $\partial\Omega_1$).



Obr. 2

Je-li funkce $v \in H^1(\Omega \setminus \Omega_0)$, označíme symbolem $\tilde{v}$ její spojité rozšíření z $\Omega \setminus \Omega_0$ do $\tilde{\Omega}$. Protože $v = 0$ na Γ, rozšiřujeme funkci v dovnitř kruhových otvorů nulou. Protože předpokládáme, že Ω_0 je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega_0$, lze tuto hranici lokálně reprezentovat jako graf lipschitzovské funkce α, definované na intervalu $\langle -\Delta, \Delta \rangle$ v lokálním souřadném systému (viz obr. 3).



Obr. 3

 Sz.4405 V

V dalším budeme předpokládat, že Ω_0^h jsou rovněž oblasti s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega_0^h$; příslušné funkce, jež popisují $\partial\Omega_0^h$ v jednotlivých souřadných systémech označíme α_h.
Nechť

(i) $|\alpha_h'(x)| \leq C$, $x \in \langle -\Delta, \Delta \rangle, \Delta > 0$,

kde $C > 0$ nezávisí na h. Za tohoto předpokladu je možno ukázat (viz), že existuje konečný počet lokálních souřadnicových systémů (počet nezávislý na h) a takový, že se hranice $\partial\Omega_0, \partial\Omega_0^h$ $\forall h > 0$ dají popsat funkcemi α, α_h.
Navíc nechť

(ii) $\alpha_h \to \alpha$ v $H^1((-\Delta, \Delta))$, $h \to 0+$.

Tímto zápisem budeme rozumět konvergenci v každém, z výše uvedeného souřadného systému.

Dále předpokládáme:

(iii) $\forall v \in H^1(\Omega \setminus \Omega_0)$ $\exists v_h \in V_h(\Omega \setminus \Omega_{0h})$ takové, že
$\tilde{v}_h \to \tilde{v}$ (silně) v $H^1(\tilde{\Omega})$.

(iv) $\vartheta_0 \in H^2(\Omega - \Omega_0)$ (funkce realizující okrajové podmínky na Γ) a
$$\| \vartheta_{0h} - \bar{\vartheta}_0 \|_{1,\Omega_h} \to 0 .$$
Přitom $\bar{\vartheta}_0 \in H^2(\tilde{\Omega})$ značí spojité rozšíření ϑ_0 z $\Omega \setminus \Omega_0$ na $\tilde{\Omega}$.

(v) pro $\forall \gamma \in U_{ad}$ $\exists$ $\gamma_h \in U_{ad}$ takové, že

$$\gamma_h \to \gamma$$

Sz.4405 V

Přitom symbol $\gamma_h \to \gamma$ znamená

$$\gamma_h \circ \alpha_h \to \gamma \circ \alpha \quad \text{v} \quad L^2((-\Delta,\Delta))$$

v každém lokální souřadnicovém systému.

(vi) Ze vztahu

$$\gamma_h \to \gamma, \quad \gamma_h \in U_{ad}^h$$

plyne, že $\gamma \in U_{ad}$.

Opět symbol $\to$ znamená, že

$$\gamma_h \circ \alpha_h \to \gamma \circ \alpha \quad \text{v} \quad L^2((-\Delta,\Delta))$$

v každém lokálním souřadnicovém systému. Hlavním výsledkem této části je

Věta 3.3. Nechť je splněno (i) - (vi). Pak existuje vybraná posloupnost $g_h \in U_{ad}^h$ (tj. řešení úloh $(\mathbb{P})_h$) a $g \in U_{ad}$ takové, že

$$\|\vartheta_h(g_h) - \vartheta(g)\|_{1,Q_h \cap Q} \to 0, \quad h \to 0+$$

$$g_h \to g \qquad \text{(ve smyslu (vi))} .$$

Přitom g je řešením $(\mathbb{P})$.

Důkaz. Nechť $g_h \in U_{ad}^h$ jsou řešené řešení úloh $(\mathbb{P})_h$. Z definice U_{ad}^h plyne, že $g_h \circ \alpha_h$ je omezena v $L^2((-\Delta,\Delta))$. (V dalším budeme automaticky myslet v každém se souřadných systémů, ale nebudeme to explicitně vypisovat).

Existuje tedy vybraná posloupnost (značíme ji stejně) a prvek $\tilde{g} \in L^2((-\Delta,\Delta))$ takový, že

$$g_h \circ \alpha_h \to \tilde{g} \qquad \text{(slabě)} \quad \text{v} \quad L^2((-\Delta,\Delta)) . \tag{10}$$

Definujme funkci $g(y), y \in \partial\Omega_0, y = \alpha(x)$ vztahem $g(y) = \tilde{g}(x)$. Protože $g_h \in U^h_{ad}$ a platí (10), plyne z (vi), že $g \in U_{ad}$. V dalším ukážeme, že g řeší $(\mathbb{P})$. Z definice $(\mathcal{P}(g_h))_h'$ z omezenosti g_h a (iv) plyne, že $u_h(g_h) \in V_h(Q_h)$ je omezena v normě $H^1(Q_h)$, tj.

$$\exists\ c > 0 \quad \text{nezávislá na } h > 0 \quad \text{a taková, že}$$
$$\| u_h(g_h) \|_{1,Q_h} \leq c .$$

Buď $\tilde{u}_h(g_h)$ spojité rozšíření funkce $u_h(g_h)$ z Q_h na $\tilde{\Omega}$ (opět nulou "za Γ_h "). Díky vlastnosti (i) je možno ukázat, že norma příslušného rozšíření nezávisí na oblasti Q_h. Jinými slovy

(11) $$\| \tilde{u}_h(g_h) \|_{1,\tilde{\Omega}} \leq \tilde{c},$$

kde $\tilde{c} > 0$ nezávisí na h. Existuje tedy funkce $\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega})$ taková, že

$$\tilde{u}_h(g_h) \rightharpoonup \tilde{u} \qquad \text{(slabě) v } H^1(\tilde{\Omega}).$$

Z Rellichovy věty a z toho, že $\Gamma_h \rightrightarrows \Gamma$ (viz (ii)) plyne, že $u \equiv \tilde{u}|_{\Omega \setminus \Omega_0} = 0$ na Γ. Potřebujeme nyní ukázat, že funkci $u + v_0$ řeší úlohu $(\mathcal{P}(g))$. Důkaz probíhá stejně jako v [1] , str. 47-52. Jediný rozdíl navíc je

ve výskytu členu $$(g_h, \varphi_h)_h \overset{def.}{\equiv} \int_{\partial\Omega_0^h} g_h \varphi_h \, ds .$$

Užijeme-li Lemma 3.1 (viz za touto větou) uvidíme, že pokud $g_h \to g$ (ve smyslu (vi)), $\tilde{\varphi}_h \to \tilde{\varphi}$ silně v H^1 a platí (ii), pak

$$\int_{\partial\Omega_0^h} g_h \varphi_h \, ds \to \int_{\partial\Omega_0} g \varphi \, ds \quad (\varphi_h = \tilde{\varphi}_h|_{\partial\Omega_0^h};\ \varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega_0}).$$

 Sz.4405 V

Důkaz toho, že $\gamma \in U_{ad}$ řeší ($\mathbb{P}$) probíhá stejně, jako v [1] str. 51, 52.

Lemma 2.1. Buď $(\gamma_h, \varphi_h)_h \equiv \int_{\partial\Omega_o^h} \gamma_h \varphi_h \, ds$

Nechť platí (i), (ii) a dále

$$\gamma_h \longrightarrow \gamma \quad \text{(slabě) (ve smyslu (vi))}$$
$$\varphi_h \longrightarrow \varphi \quad \text{(silně) (ve smyslu (v)).}$$

Pak

$$(\gamma_h, \varphi_h)_h \longrightarrow (\gamma, \varphi) \equiv \int_{\partial\Omega_o} \gamma\varphi \, ds .$$

Důkaz. $(\gamma_h, \varphi_h)_h$ můžeme psát jako součet konečně-mnoha (nezávisle na h) integrálů tvaru

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} (\gamma_h \circ \alpha_h)(\varphi_h \circ \alpha_h) \sqrt{1+(\alpha_h')^2} \, dx_1 .$$

Zřejmě stačí ukázat, že $(\varphi_h \circ \alpha_h)\sqrt{1+(\alpha_h')^2} \longrightarrow (\varphi \circ \alpha)\sqrt{1+(\alpha')^2}$ silně v $L^2((-\Delta, \Delta))$. Pišme pro jednoduchost φ_h, resp. φ místo $\varphi_h \circ \alpha_h$, resp. $\varphi \circ \alpha$. Pak

$$(12) \quad \varphi_h^2(1+(\alpha_h')^2) - \varphi^2(1+(\alpha')^2) = \varphi_h^2(1+(\alpha_h')^2) \pm \varphi^2(1+(\alpha_h')^2) -$$
$$- \varphi^2(1+(\alpha')^2) = (\varphi_h^2 - \varphi^2)(1+(\alpha_h')^2 + \varphi^2((\alpha_h')^2 - (\alpha')^2) .$$

Předchozí rovnost zintegrujeme v intervalu $(-\Delta, \Delta)$. Integrál z levé strany v (12) označíme I, integrály z jednotlivých sčítanců napravo v (12) jako I_1, I_2. Je

$$|I_1| \leq C \int_{-\Delta}^{\Delta} |\varphi_h - \varphi| \cdot |\varphi_h + \varphi| dx_1 \leq C \, \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2((-\Delta, \Delta))} \longrightarrow 0 ,$$

když jsme užili (i) a předpokladů Lemmatu.

Podobně

$$|I_2| \leq c \int_{-\Delta}^{\Delta} |\alpha_h' - \alpha'| \, |\alpha_h' + \alpha| dx \leq c \, \|\alpha_h' - \alpha\|_{L^2((-\Delta, \Delta))} \longrightarrow 0 , \; h \to 0+$$

 Sz.4405 V

4. Řešení úlohy identifikace tepelných toků na počítači

V této kapitole popíšeme implementaci metody identifikace tepelných toků, obsažené v předešlé zprávě [1].

Navržená implementace má modulární strukturu a lze v ní využít běžných podprogramů pro práci s konečnými elementy. Program popsaný v této zprávě používá některé podprogramy z [2, 3] , které pracují s lineárními konečnými prvky.

4.1 Formulace úlohy

Nechť je dáno (viz obr. 4 ; rozměry jsou v mm, jde o modelový příklad):

- oblast Ω (řez formou)
- rozdělení hranice $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,
  $\mu(\Gamma_i \cap \Gamma_j) = 0$, $i \neq j$, kde
  - Γ_1 je hranice s odlitkem
  - Γ_2 je hranice chladicích otvorů
  - Γ_3 je hranice s okolním prostředím
- koeficient $a(x)$ v rovnici vedení tepla, tj. teplotní vodivost
- naměřené a interpolované hodnoty $\vartheta_0(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ (uzávěr oblasti Ω). Předpokládáme, že tato funkce je dostatečně hladká, $\vartheta_0|_\Omega \in H^1(\Omega)$.

Na hranici Γ_1 je neznámá intenzita tepelného toku, která se má určit:

(1) $$a \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \gamma, \quad x \in \Gamma_1$$

(Neumannova podmínka).

Na Γ_2 je zadaná teplota

(2) $$\vartheta\big|_{\Gamma_2} = \vartheta_0\big|_{\Gamma_2}$$

(Dirichletova podmínka).

Na Γ_3 je zadán průnik tepla do okolního prostředí, vyjádřený Newtonovou podmínkou

(3) $$a\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha_k\,(\vartheta_{okol\acute{i}} - \vartheta)\ ,\quad x \in \Gamma_3\ ,$$

kde α_k je součinitel přestupu tepla konvekcí a $\vartheta_{okol\acute{i}}$ je teplota okolí.

Rovnice vedení tepla je

(4) $$-\mathrm{div}\,(a\,\nabla\vartheta) = 0 \qquad \text{v} \quad \Omega$$

s okrajovými podmínkami (1, 2, 3).

Dále nechť je dána množina přípustných hustot tepelných toků

(5) $$\left\{ \begin{aligned} U_{ad} = \Big\{ \gamma \in L^{\infty}(\Gamma_1);\ C_1 \le \gamma(x) \le C_2 \text{ s.v. v } \Gamma_1\ , \\ C_3 \le \int_{\Gamma_1} \gamma\, ds \le C_4 \Big\} \end{aligned} \right.$$

a účelový funkcionál

(6) $$J(\gamma) = \frac{1}{2}\,\|\vartheta(\gamma) - \vartheta_0\|^2_{P,Q}\ ,$$

kde $\vartheta(\gamma)$ je řešení rovnice (4) s okrajovými podmínkami (1, 2, 3) a norma $\| \quad \|_{p,q}$ je definována vztahem

(7) $$\|\zeta\|^2_{p,q} = \int_\Omega (p \nabla\zeta \nabla\zeta + q|\zeta|^2)\,dx\,.$$

Pro $p = q = 1$ dostáváme H^1 normu, a pro $p = 0,\ q = 1,\ L^2$ normu. Obecně mohou být p, q funkce bodu x, $p, q \in C^1(\bar\Omega)$ (hladkost je třeba vzhledem k použití integrační formule v metodě konečných prvků).

Úloha identifikace zní:

Najít $\gamma \in U_{ad}$ tak, aby $J(\gamma)$ bylo minimální.

Jde tedy o úlohu identifikace se stavovou rovnicí (4) s okrajovými podmínkami (1, 2, 3).

4.2. Řešení metodou konečných prvků

Definujme prostor
$$V = \{ v \in H^1(\Omega)\ ;\ v|_{\Gamma_2} = 0 \}\,.$$

Stavová úloha (1, 2, 3, 4) má variační formulaci

(8) $$\left\{ \begin{aligned} & \vartheta - \vartheta_0 \in V, \\ & \int_\Omega a \nabla\vartheta \nabla w\,dx + \int_{\Gamma_3} \alpha_k \vartheta w\,ds = \\ & \qquad = \int_{\Gamma_1} \gamma w\,ds + \int_{\Gamma_3} \alpha_k \vartheta_{okolí} w\,ds \end{aligned} \right.$$

pro každé $w \in V$.

Tuto úlohu aproximujeme lineárními konečnými prvky. Nejdříve aproximujeme oblast Ω polygonální oblastí Ω_h.

Ze zadání úlohy (obr. 4) je zřejmé, že příslušné části hranice $\Gamma_1^h, \Gamma_2^h, \Gamma_3^h$ lze volit jako sjednocení úseček tvořících hranici Ω_h.

V oblasti Ω_h nechť je dána konformní triangulace $\{T_i\}$, tj.

$$\bar{\Omega}_h = \cup T_i ,$$

a každé dva trojúhelníky $T_i, T_j, i \neq j$ jsou buď dizjunktní, nebo mají společnou právě jednu hranu, nebo právě jeden vrchol.

Definujme nyní prostor konečných prvků

$V_h = \{ v \in V \cap C^0(\bar{\Omega})$; je lineární na všech trojúhelnících $T_i \}$.

V našem modelovém příkladu byla provedena následující zjednodušení:

- chladicí otvory jsou čtvercového průřezu
- oblast je symetrická podle os σ_1 a σ_2 (viz obr. 4). Stačí tedy počítat s jednou čtvrtinou oblasti (na obr. 4 vyšrafováno). Dostáváme tedy oblast podle obr. 5 , kde je rovněž ukázána použitá triangulace.

Na části hranice vzniklé myšleným rozříznutím Ω je z důvodů symetrie homogenní Neumannova podmínka. Tato zjednodušení jsou obsažena pouze v datech modelového problému, na kterém jsme program testovali, program sám je na tvaru oblasti nezávislý.

Funkce z U_{ad} aproximujeme funkcemi z množiny

$$U_{ad}^h = \{ \chi_h \in U_{ad} ; \varphi|_{(T_i \cap \Gamma_1^h)^\circ} = \text{const.} \ \forall T_i \} ,$$

kde $(T_i \cap \Gamma_1^h)^\circ$ je vnitřek úsečky, která je průnikem trojúhelníku T_i a hranice Γ_1^h.

Položme

$$(9) \qquad t_h = \sum T_j \cdot \omega_j \in V_h ,$$

$$(10) \qquad \gamma_h = \sum F_j \chi_j \in U_{ad}^h ,$$

kde ω_j , χ_j jsou bázické funkce v V_h, resp. U_{ad}, ω_j v částech lineární, χ_j po částech konstantní.

Stavová úloha (8) má diskrétní aproximaci:

Najít $t_h = t_h(\gamma_h) \in V_h$ tak, aby

$$(11) \qquad \int_{\Omega_h} a \nabla t_h \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha_k t_h v_h \, ds =$$

$$= - \int_{\Gamma_3} \alpha_k t_{oh} v_h \, ds + \int_{\Gamma_1} \gamma_h v_h \, ds - \int_{\Omega_h} a \nabla t_{oh} \nabla v_h \, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \alpha_k t_{okolí} v_h \, ds \qquad \forall v_h \in V_h ,$$

kde $t_{oh} = \vartheta_o$ v uzlech hranice Γ_2

$t_{oh} = 0$ v ostatních uzlech Ω_h a

$t_{okolí}$ je aproximace $\vartheta_{okolí}$.

Pak definujeme

$$(12) \qquad \vartheta_h(\gamma_h) = t_{oh} + t_h(\gamma_h) .$$

Úloha (11) je ekvivalentní soustavě lineárních rovnic

$$AT = BF + b \,, \tag{13}$$

kde T a F jsou vektory koeficientů v rozvojích (9, 10), $A = (A_{ij})$ je matice tuhosti,

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} a \nabla \omega_i \nabla \omega_j \, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha_k \, \omega_i \omega_j \, ds$$

$B = (B_{ij})$ je matice integrační formule na Γ_1 s prvky

$$B_{ij} = \int_{\Omega_h} \omega_i \chi_j \, ds \,,$$

a $b = (b_i)$ je vektor pravé strany s prvky

$$b_i = -\int_{\Omega_h} a \nabla t_{oh} \nabla \omega_i \, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha_k \, t_{okolí} \, \omega_i \, ds -$$

$$- \int_{\Gamma_3} \alpha_k \, t_{oh} \, v_h \, ds \,.$$

Účelový funkcionál (8) má diskrétní aproximaci

$$J_h(\gamma_h) = \frac{1}{2} \sum_{\xi} \| (\vartheta_h(\gamma_h) - \vartheta_{oh} \|^2_{P,Q} \tag{14}$$

kde $\vartheta_{oh} = \vartheta_0$ v uzlech triangulace a ϑ_{oh} je lineární na všech elementech T_i .

S použitím rozvoje (9) a vztahů (6, 7, 12, 13, 14) dostaneme

$$(15) \qquad j_h(\vartheta_h) \overset{\text{def.}}{\equiv} \hat{J}(T) = \frac{1}{2}(T-T_o)^T C (T-T_o),$$

kde T_o je vektor koeficientů v $\vartheta_{oh} = t_{oh} + \sum T_{oj}\,\omega_j$,

a $C = (C_{ij})$ je matice s prvky

$$C_{ij} = \int_{\Omega_h} (p\,\nabla\omega_i\,\nabla\omega_j + q\,\omega_i\,\omega_j)\,dx .$$

Poznámka 1.

Je důležité si uvědomit, že C je matice tuhosti pro úlohu

$$(16) \qquad u \in V;\ \int_{\Omega} (p\,\nabla u\,\nabla v + q\,u v)\,dx = 0, \quad \forall\, v \in V,$$

pro danou triangulaci Ω.

Poznámka 2.

Výše uvedené integrály se v programu počítají pomocí integrační formule s uzly v těžištích trojúhelníků.

Numerická úloha tedy zní

$$(17) \qquad J(F) = \frac{1}{2}(T-T_o)^T C\,(T-T_o) \rightarrow \min.,$$

kde T je určeno ze soustavy lineárních rovnic

$$AT = BF + b .$$

Kvadratický funkcionál J se minimalizuje za podmínek daných nerovnostmi

$$\vartheta_h \in U_{ad}^h .$$

Gradient J spočítáme z pravidla o složeném derivování (připomeňme, že matice A a C jsou symetrické, a že gradient je funkcionál, tedy, řádkový vektor):

$$\operatorname{grad} J(F) = \frac{\partial J}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial F}$$
$$= (T-T_0)^T C A^{-1} B ,$$

tedy

(18) $$(\operatorname{grad} J)^T = B^T A^{-1} C (T - T_0) ,$$

kde

(19) $$T = A^{-1} (BF + b) .$$

Algoritmus 1. Pro dané koeficienty intenzit toků F se spočítají koeficienty teploty T podle (19), pak $J(F)$ podle (17) a gradient podle (18).

Program pro minimalizaci vyvolá v každém kroku tento algoritmus.

Poznámka 3.

K vytvoření matic A, C, vektoru b a při násobení inverzní maticí A^{-1} lze použít libovolný vhodný programový produkt pro práci s konečnými elementy. Matici C lze vytvořit použitím podprogramu pro sestavení matice tuhosti na úlohu (16).

4.3. Popis programu

Pro vytvoření matic A, C a vektoru b jsme použili upravenou část programu KACMET z [2, 3]. K násobení inverzní maticí A^{-1} jsme s výhodou podprogram MCHB (standartní knihovna podprogramů IBM) pro řešení soustavy lineárních rovnic se symetrickou pásovou maticí pomocí Choleskyho dekompozice.

K násobení symetrické pásové matice a vektoru, potřebnému ve výpočtu výrazů (17, 18), jsme vytvořili podprogram MULTB. Násobení maticemi B a B^T je jednoduché a je vloženo na příslušných místech přímo do programu. Přirozeně, že nemá smysl matici B ukládat explicitně. Pomocí těchto podprogramů je implementován výpočet hodnoty účelového funkcionálu a jeho gradientu (Algoritmus 1) v podprogramu COMPF. Tento výpočet je poměrně rychlý. Choleskyho dekompozice se počítá pouze při prvním vyvolání (inizalizační větev, viz níže). Přesto se ukázalo jako výhodné vyvolat nejdříve COMPF pro $F = 0$, $F = \lambda . e^i$ (e^i i-tý jednotkový vektor, $i = 1, \ldots,$ počet bázických funkcí v U_{ad}, $\lambda \neq 0$). Koeficient λ se zavádí proto, že hodnota $\lambda = 1$ nemusí vyhovovat s ohledem na zaokrouhlovací chyby. Tím dostáváme matici $\tilde{A}$ a vektor G takový, že

$$J(F) = \frac{1}{2} F^T \tilde{A} F - G^T F .$$

Platí totiž, že

$$\text{grad } J(0) = -G^T$$

$$(\text{grad } J(\lambda e^i))^T + G = i\text{-tý} \quad \text{sloupec } \tilde{A} . \lambda$$

Protože matice $\tilde{A}$ je velmi špatně podmíněná, programu umožňuje pracovat obecně s <u>regularizovaným</u> funkcionálem

(20) $$J_\varepsilon(F) = \frac{1}{2} F^T(\widetilde{A} + \varepsilon N)F - G^T F, \quad \varepsilon \geq 0,$$

kde N je matice odpovídající normě v $L^2(\Gamma_1)$,
tj. $N = (n_{ij})$, $n_{ij} = \int_{\Gamma_i} \chi_i \chi_j \, ds$.

Hodnota a gradient funkcionálu se pak počítají přímo z (20). Minimalizace $J_\varepsilon(F)$ na množině $\{F; \sum F_i \chi_i \in U_{ad}\}$ je realizována knihovní procedurou VE01A (Harwell Subroutine Library), která se volá prostřednictvím podprogramu SOLVE.

Struktura volání podprogramů je na obr. 6. Poznamenejme, že VE01A a SEZNA1 obsahují další podprogramy (na obrázku již nezachycené).

4.4 Soubory

1, 2 - pracovní
5 - vstupní data
6 - tisk

4.5 Programové moduly

MAIN

V tomto hlavním programu se nejprve provede načtení základních materiálových konstant a teploty okolí (shodné s teplotou chladícího media), které se předají podprogramu HELP v COMMON oblasti MATER. Poté se vyvolá inicializační větev podprogramu COMPF (viz dále) kde se mimo jiné vypočte podle předem zadaných toků požadovaná teplota T_0 (která při skutečné identifikaci bude výsledkem měření na reálném objektu). Teplota T_0 se potom poruší pseudonáhodnými poruchami s rovnoměrným rozložením a zvolenou amplitudou. Pak se pomocí hodnot grad $J(0)$ a grad $J(\lambda a_i)$ spočte vektor G a matice $\widetilde{A}$ (viz odst. 3.1). Zároveň se pomocí $J(0)$ a $J(\lambda_0 a_i)$ kontroluje správnost výpočtu gradientu. Hodnota λ by měla být volena asi tak, aby tok $\lambda . ds_i$ (ds_i.... délka i-té části hranice Γ_1) byl srovnatelný s předpokládanou hodnotou toku přes Γ_1. Naopak $\lambda_0 > 0$ by mělo být co nejmenší, avšak s ohledem na zaokrouhlovací chyby ne příliš. Dále se matice $\widetilde{A}$ modifikuje podle (20) na $\widetilde{A} + \varepsilon N$ a spočte se (z nutných podmínek pro extrém = soustava lin. algebraických rovnic) $\mathrm{Arg\,inf}\, J_\varepsilon(F)$, tj. řešení úlohy bez omezení $F \in U_{ad}$. Pak se vyvolá podprogram SOLVE. Naposledy uvedené úlohy je možno libovolněkrát řešit pro různé hodnoty ε.

SUBROUTINE SOLVE

Sestaví data pro podprogram VE01A. Načítají se 4 čísla charakterizující množinu U_{ad}, totiž horní a dolní mez hustoty toků přes Γ_1 a horní - dolní mez pro tok přes Γ_1. Počáteční hustota toků se stanoví automaticky a přitom jsou z U_{ad} je-li $U_{ad} \neq \emptyset$. Řešení odpovídající optimálním hustotám toků se nakonec počítá a tiskne pomocí podprogramu COMPF.

SUBROUTINE FUNCT

Výpočet $J_\varepsilon(F)$ a grad $J_\varepsilon(F)$.

SUBROUTINE VE01A

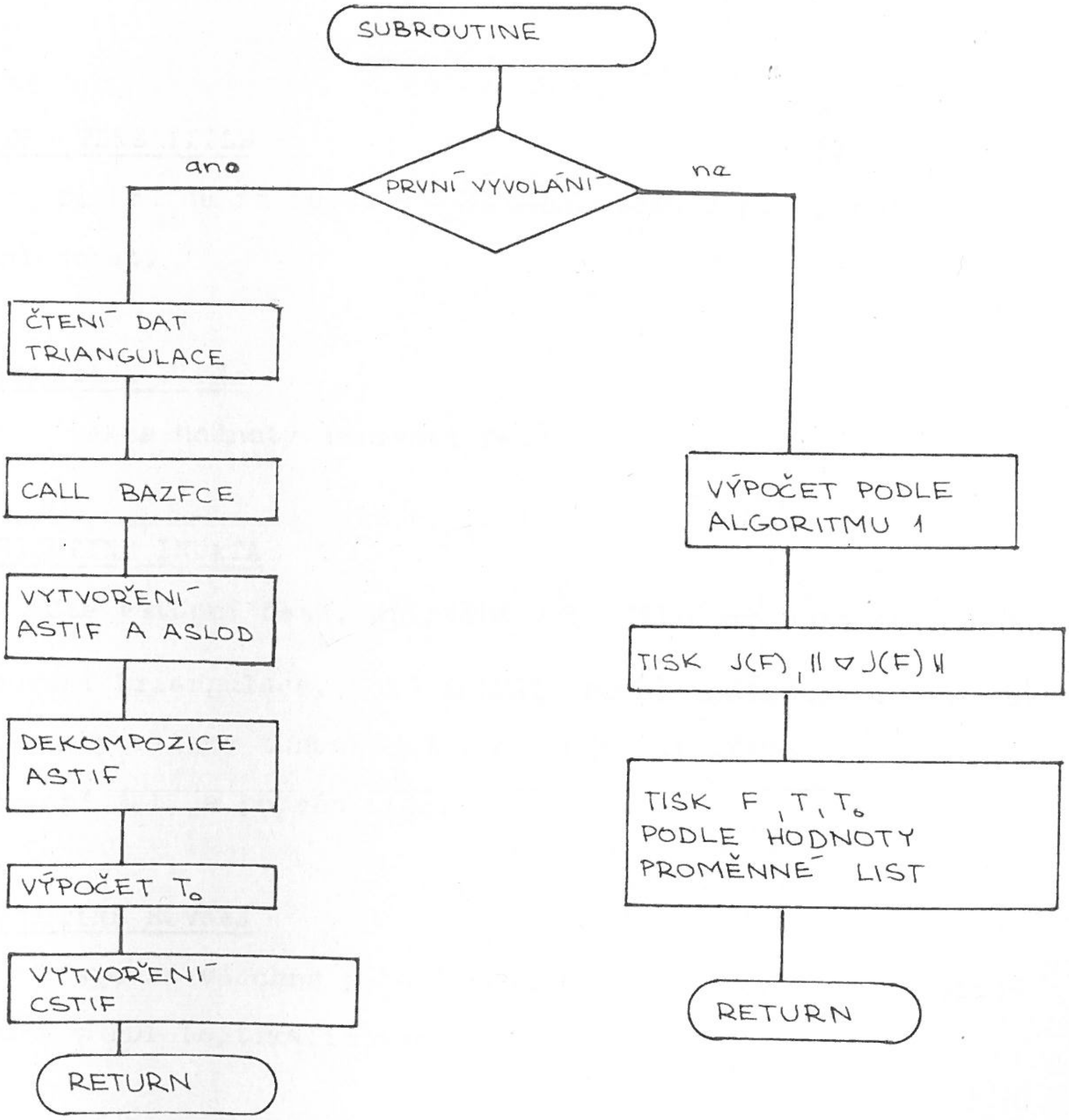
Minimalizace hladké funkce za lineárních omezení

SUBROUTINE INXEYE

Zadává x-ové a y-ové souřadnice bodů pomocí kterých jsou definovány makroelementy. (Tím se obchází nutnost výpočtu těchto souřadnic ručně v případě zadávání ze štítků).

SUBROUTINE COMPF

Realizuje Algoritmus 1 (viz výše). Všechny důležité proměnné a pole (i použité v podřízených podprogramech) jsou dostatečně popsány v poznámkových štítcích.



Označení v programu	Označení ve vzorcích
ASTIF	A
CSTIF	C
ASLOD	b
FLOW	F
GRAD	grad J(F)
VALUE	J(F)
T	T
TØ	T_0

SUBROUTINE TITLE

Tiskne se na novou stránku hlavičku výpisu, který bude následovat.

SUBROUTINE FLUXE

Tiskne hodnoty derivací řešení.

SUBROUTINE INDATA

Čte vstupní data, případně volá GRID pro automatické generování triangulace. Volá SEZNA1 pro optimalizaci očíslování uzlů, aby matice tuhosti měla co nejmenší šířku pásu. Způsob zadávání dat je popsán níže.

SUBROUTINE ROVNEJ

Přerovná všechna pole indexovaná čísly uzlů podle očíslování v ID1 (optimalizované pomocí SEZNA1)

SUBROUTINE HELP

Do parametru ZPET dává koeficienty rovnice a okrajových podmínek. Při ISW = 1 se generuje matice A, při ISW = 2 matice C. V prvním případě se na místě Dirichletovy podmínky zadává funkce ϑ_0 (na hranici je totožná s Dirichletovou podmínkou).

SUBROUTINE BAZFCE

Ukládá do souboru 2 hodnoty, které se později využijí při výpočtu derivací na elementech a plochy elementů.

SUBROUTINE STIFFP

Ze souboru 2 čte připravené hodnoty, vytváří lokální matice tuhosti a pravé strany na elementech, a ukládá je do souboru 1.

SUBROUTINE ASMBLE

Z dat na souboru 1 vytváří globální matici tuhosti a vektor pravých stran.

SUBROUTINE XDOT

Vektor koeficientů doplňuje o hodnoty Dirichletových podmínek do tvaru, vhodného pro tisk.

SUBROUTINE TIMBOP

Tiskne zadaný vektor indexovaný čísly uzlů.

SUBROUTINE MULTB

Násobí symetrickou pásovou matici, jejíž horní polopás je uložen po řádcích, s obecným vektorem.

SUBROUTINE GRID

Generuje triangulaci podle zadaných parametrů. Možnosti původního programu byly rozšířeny v tom smyslu, že když je první čtené číslo (tj. počet makroelementů) udáno záporně, pak se vynechá čtení souřadnic uzlů a vezmou se souřadnice vložené do polí XE, YE (zde podprogramem INXEYE).

SUBROUTINE SEZNA1

Optimalizuje očíslování uzlů tak, aby byla co nejmenší šířka pásu matice tuhosti.

Další podrobnosti o podprogramech GRID a SEZNA1 lze nalézt v [2, 3].

4.6. Omezení programu

Počet uzlů 200 (u GRID a SEZNA1 400)

Počet elementů 260

Počet identifikovaných toků 20

Pokud by bylo třeba řešit větší úlohy, je třeba zvětšit meze polí v MAIN, COMPF, FLUXE, SOLVE, FUNCT a pro více než 400 uzlů i v GRID a SEZNA1.

4.7. Modelový příklad a ukázka zadávání dat

Geometrie a použitá triangulace v modelovém příkladu jsou patrny z obr. 4 a 5. Síť byla generována poloautomaticky programem GRID. Za tím účelem byla oblast rozdělena na 8 makroelementů. V okolí chladících otvorů byla síť poněkud zahuštěna, čehož bylo dosaženo posunutím dělících bodů na stranách makroelementů směrem ke chladícím otvorům (poměr 2 : 1). Detailní způsob použití GRIDu zde popisován nebude (lze jej nalézt v [2, 3]). Dále byly zvoleny tyto parametry: (všechny jednotky jsou zásadně v SI, teploty jsou ve stupních Celsia).

teplotní vodivost $a(x) = 38\ kgms^{-3}K^{-1}$,

součinitel přestupu tepla konvekcí $\alpha_k = 35\ kgs^{-3}K^{-1}\ (Wm^{-2}K^{-1})$,

teplota okolí $\vartheta_{okol\acute{i}}$ = teplota chladícího média $\vartheta_0|_{\Gamma_2} = 20^\circ C$,

hustota toku přes Γ_1 podle které se generuje ϑ_0 byla $\gamma_0 = 99.10^3\ kgs^{-3}$ (čemuž odpovídají teploty na hranici Γ_1 řádově 300 °C).

Norma v (1.6) byla použita s $p=0$, $q=1$, tedy norma v $L^2(\Omega)$. Jednak to patrně lépe vystihuje náhodné perturbace ϑ_0 (viz popis MAINu), jednak v případě $p>0$, $q=1$ není zcela zřejmé jakou hodnotu p zvolit.

Uvažujeme-li regularizovaný funkcionál

$$J_\varepsilon(\gamma) = \frac{1}{2}\|\vartheta(\gamma) - \vartheta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\gamma\|^2_{L^2(\Gamma_1)},$$

$$\vartheta_0 = \vartheta(\gamma_0) + \vartheta_p$$

(kde γ_0 jsou předem zvolené toky a ϑ_p jsou náhodné perturbace), vzniká otázka jak v praxi volit parametr ε. Numerické experimenty ukazují, že řešení neregularizované úlohy, t.j. s funkcionálem J_0, jsou dosti nestabilní. Např. při znalosti teploty v uzlových bodech s přesností 5% nemůžeme čekat přesnost v určení hustot toků lepší než 30% (pro geometrii a síť v modelovém případě). To patrně souvisí s tím, že J_0 není koercitivní a stejnoměrně konvexní ani na $H^{-1/2}(\Gamma_1))$. Naproti tomu J_ε s $\varepsilon > 0$ je koercitivní a také stejnoměrně konvexní v $L^2(\Gamma_1)$.

Není ovšem vhodné volit ε příliš velké, protože řešení úlohy s J_ε, potom mají "málo" společného s původní úlohou. Označme $\gamma_\varepsilon = \arg\inf J_\varepsilon$. Zřejmě $J_0(\gamma_\varepsilon) \geq \inf J_0$. Budeme se snažit volit ε tak malé, aby se $J_0(\gamma_\varepsilon)$ příliš nelišilo od optimální hodnoty $\inf J_0$. Pak zřejmě odchylka $\vartheta(\gamma_\varepsilon)$ od ϑ_0 je téměř minimální, což je účelem identifikace. Na druhé straně numerické experimenty ukazují že i tato malá ε již mají dobrý zhlazovací účinek na optimální hustoty toků, kde se pro příliš malá ε mají tendenci objevovat složky s vyššími frekvencemi. To vše je pro jednu konkrétní perturbaci ϑ_p o velikosti $\pm$ 10 K znázorněna na obr. 4. Obr. 4 a znázorňuje optimální hustoty toků bez přítomnosti poruch, tedy známe optimální řešení $(=\gamma_0)$ a vidíme, že zaokrouhlovací chyby dosahují hodnoty zhruba 0,7% (výpočty v jednoduché přesností). Na obr. 4 b, c, ... je znázorněno optimální řešení úlohy s poruchami pro různé hodnoty ε. Je zde vidět tendence k oscilacím pro malá ε a zhlazovací účinek ε. Na obr. 7 je znázorněna závislost $J_0(\gamma_\varepsilon)$ na ε. Dodejme, že v uvedených experimentech šlo o neomezenou optimalizaci a optimální řešení bylo získáno z nutných podmínek optimality tj. řešením soustavy lineárních rovnic. Při použití programu VEO1A pro omezenou minimalizaci bylo zjištěno, že pro neregularizovaný funkcionál dochází k selhávání VEO1A z důvodů špatné podmíněnosti a nahromadění zaokrouhlovacích chyb, zatímco u regularizovaných funkcionálů proběhne minimalizace v pořádku, i když výsledky jsou značně nepřesné. Zdá se však, že při použití techniky regularizace by možná bylo vhodné omezení neuvažovat. (Snad také proto, že omezenost U_{ad} zaručí sice koercivitu, ale nikoli stejnoměrnou konvexitu, která je pro stabilitu důležitá).

Na závěr uvedeme příklad zadávání dat (viz obr. 6). Jsou zde uvedeny všechny řídící štítky pro krok GO a data, která nyní zhruba popíšeme:

1.řádek: $a, \alpha_k, \vartheta_{okolí}$

2.řádek: počet identifikovaných toků, předepsaná hodnota toků γ_0, hodnota λ pro výpočet matice $\tilde{A}$, λ_0 pro testování gradientu $\nabla J_0(0)$.

3.řádek: název úlohy

4.řádek: viz [2] (27 je počet uzlů ve kterých je zadána Dirichletova okrajová podmínka, 12 je počet hran na kterých je Newtonova okrajová podmínka).

5. - 21.řádek: data pro GRID, viz [2]. První číslo je udáno záporně, takže jsou vynechány souřadnice uzlů, které se zadávají v INXEYE.

22. - 23.řádek: seznam uzlů, ve kterých je zadána Dirichletova podmínka

24. - 35.řádek: seznam trojúhelníků a hran (zadaných dvěma uzly) na kterých jsou zadány Newtonovy okrajové podmínky

36.řádek:hodnota pro kontrolu přesnosti Choleskyho dekompozice

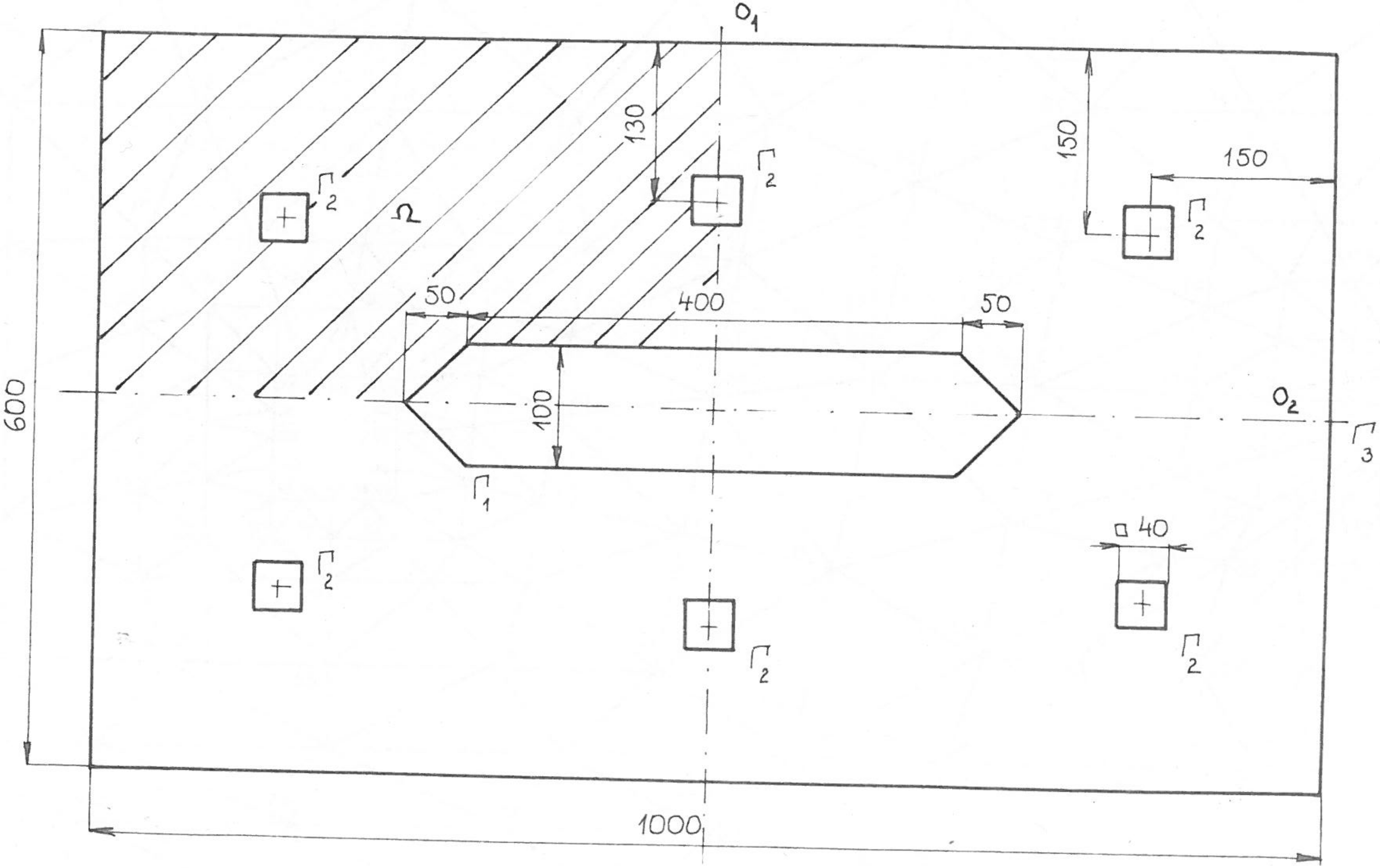
37.řádek:seznam uzlů určujících hranici Γ_1

38.řádek:seznam generátoru pseudonáhodných čísel a velikost perturbací ϑ_p.

39.řádek:regularizační parametr ε

40.řádek:parametry určující U_{ad}, tj. horní a dolní mez pro hustotu toků a horní a dolní mez pro celkový tok

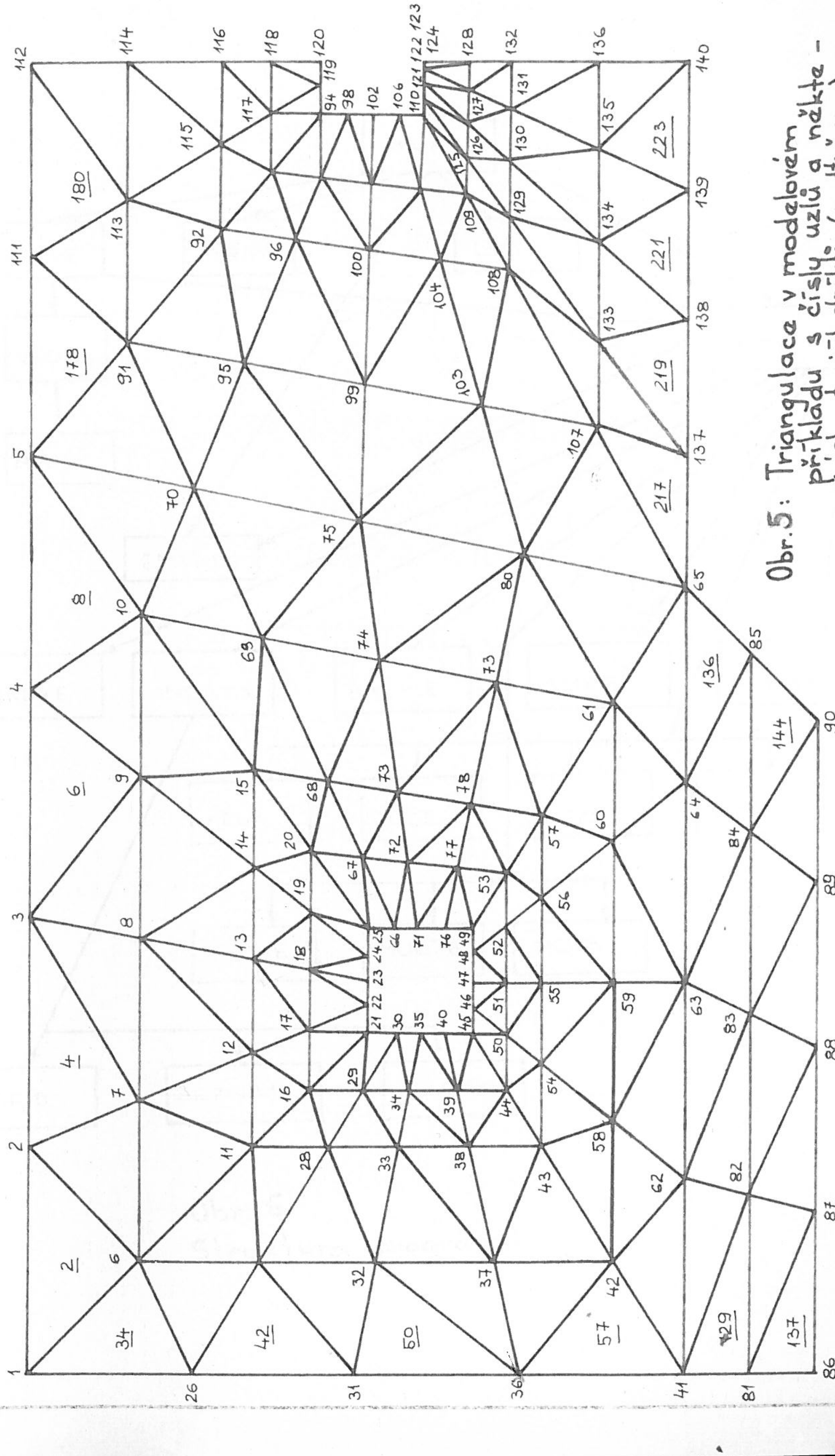
41. - 43.řádek: stejný význam jako předchozí trojice řádků, která se může eventuelně libovolněkrát opakovat.



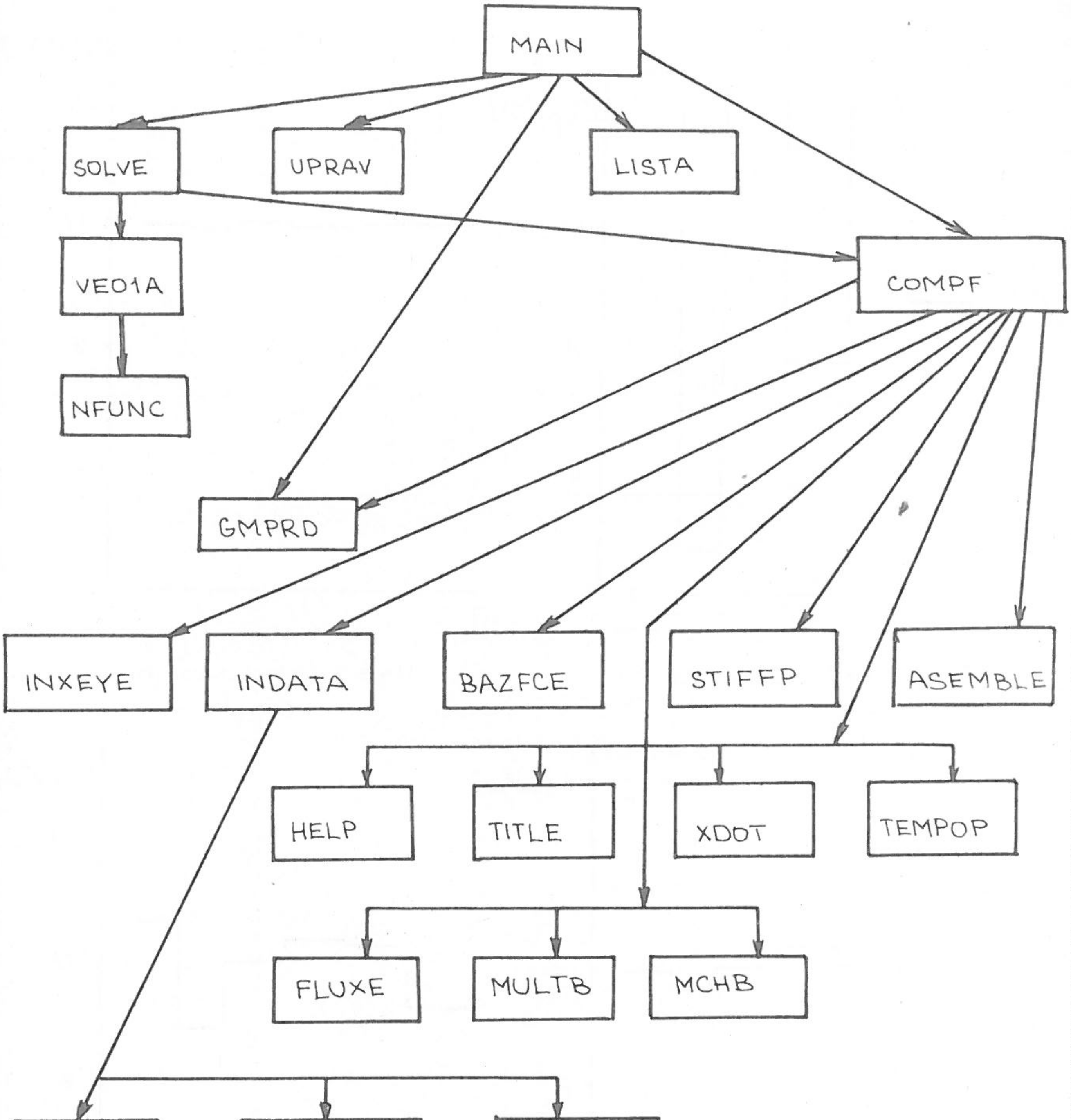
Obr. 4 Geometrie modelového příkladu

Pozn.: těleso je středově symetrické

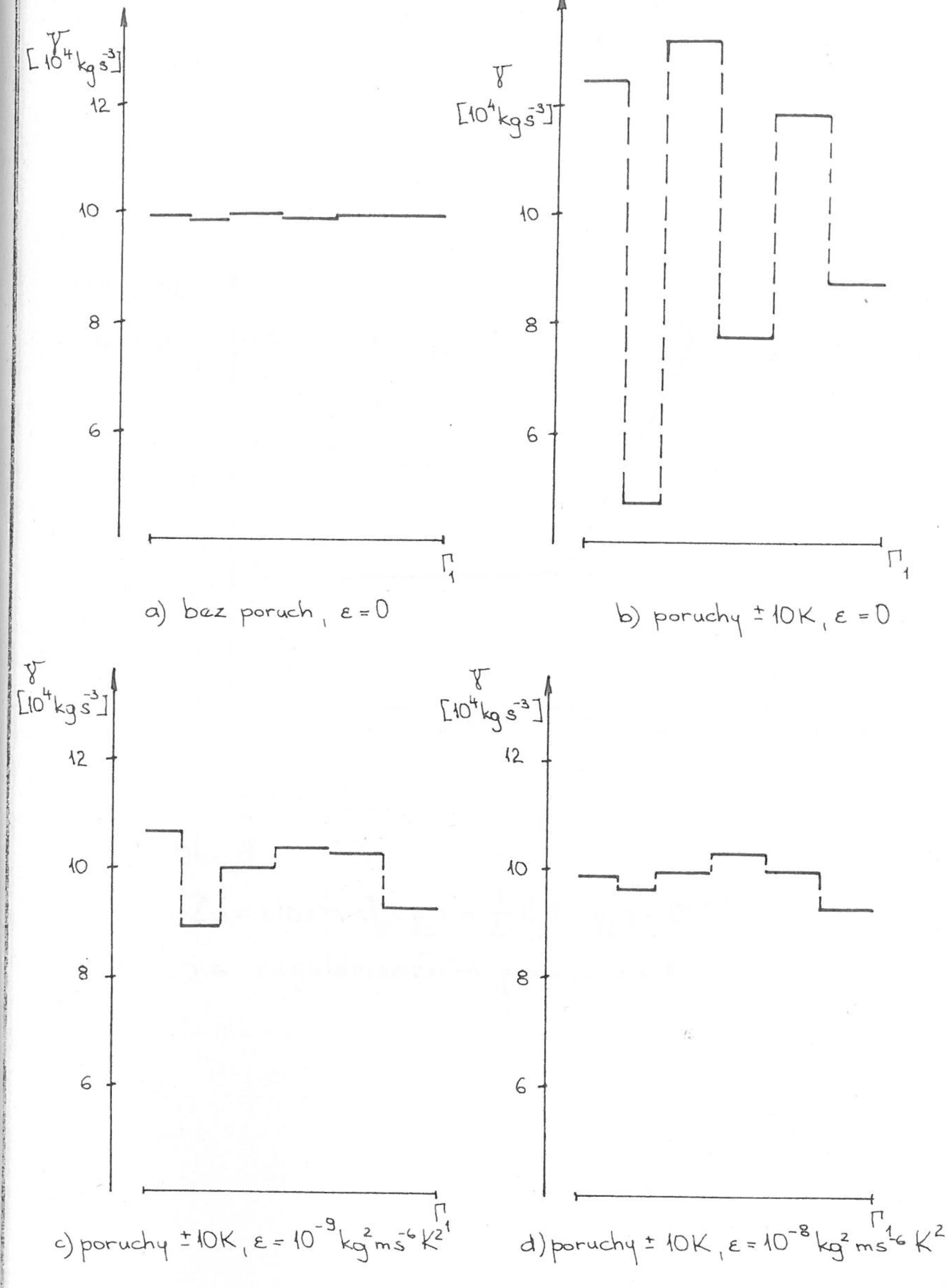
Sz.4405 V



Obr.5: Triangulace v modelovém příkladu s čísly uzlů a některých trojúhelníků (podtržena)

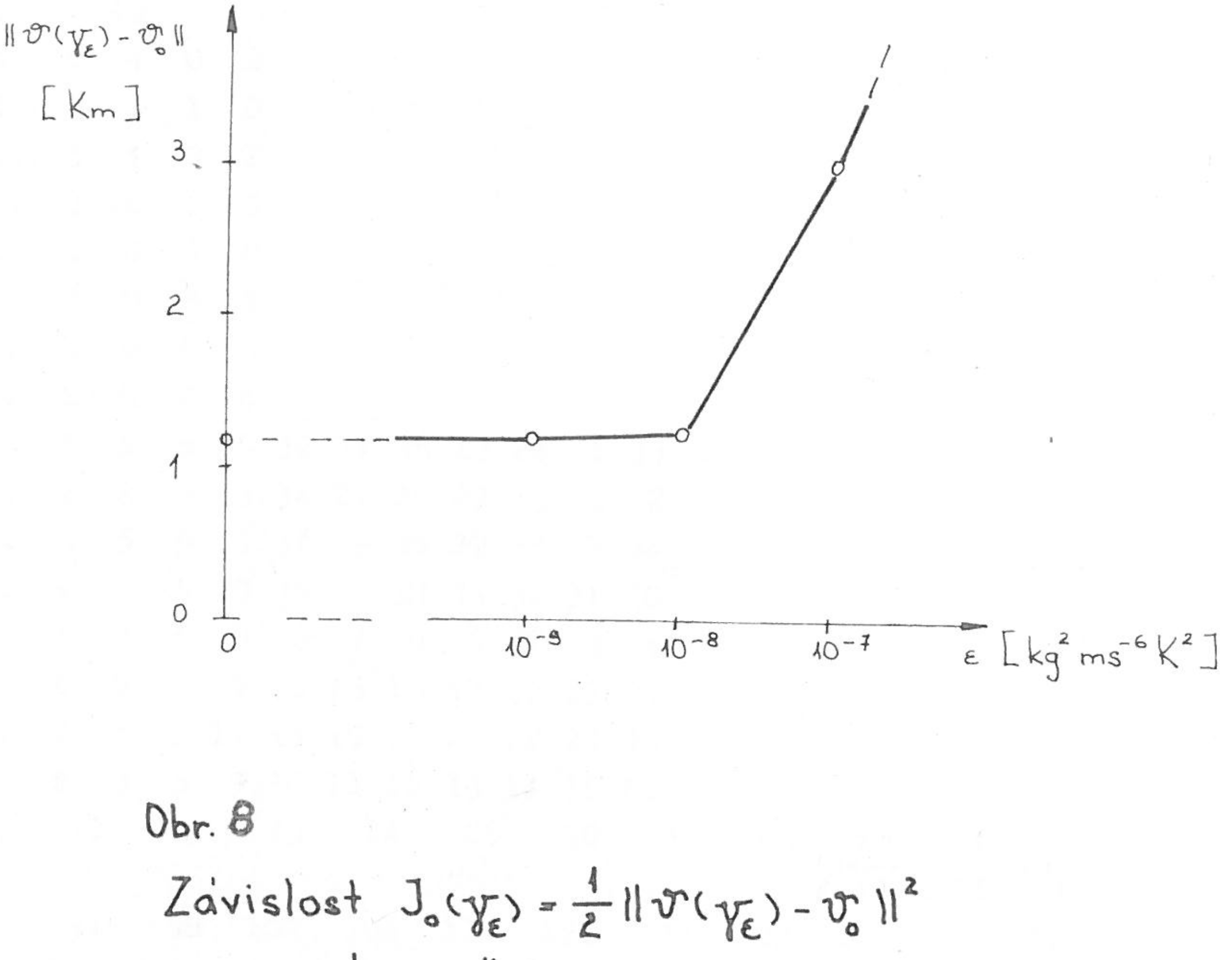


Obr. 6
Struktura programu



Obr. 7 : Hustoty toků na Γ_1

Sz.4405 V



Obr. 8

Závislost $J_0(\gamma_\varepsilon) = \frac{1}{2} \|\vartheta(\gamma_\varepsilon) - \vartheta_0\|^2$
na regularizačním parametru ε.

```
//GO.FT01F001 DD UNIT=DISK,DISP=(NEW,DELETE),
// DCB=RECFM=VSB,BLKSIZE=1000),SPACE=(1000,(20,20),RLSE)
//GO.FT02F001 DD UNIT=DISK,DISP=(NEW,DELETE),
// DCB=(RECFM=VSB,BLKSIZE=1000),SPACE=(1000,(20,20),RLSE)
//GO-SYSIN DD *
 1.     38.00      35.00      20.00
 2.     6  99000.00 500000.00    500.00
 3.IDENTIFIKACNI ULOHA
 4.    1    0    0   27    1    0    0   12    1
 5. -8 40
 6.  0  4  0  2
 7.  3  0  1  0
 8.  5  4  0  2
 9.  3  6  1  0
10.  0  0  3  0
11.  8  0  7  4
12.  0  0  0  6
13.  0  0  0  6
14.  1  5  5 25 32 31 36 23 24  1 33
15.  2  5  5  3 34 27 26 25 33  1  2
16.  3  5  5  3 37  9 35 29 28 27 34
17.  4  5  5 29 35  9 38 23 36 31 30
18.  5  3  5  5  6  7  8  9 37  3  4
19.  6  5  5  9 40 15 16 17 39 23 30
20.  7  5  3 17 18 19 20 21 22 23 39
21.  8  5  5  9 10 11 12 13 14 15 40
22.   21   22   23   24   25   30   35   40   45   46   47   48
                                             49   76   71   66
23.   94   98  102  106  110  121  122  123  124  119  120
24.  137   86   81
25.  129   81   41
26.   57   41   36
27.   50   36   31
28.   42   31   26
29.   34   26    1
30.    2    1    2
31.    4    2    3
32.    6    3    4
```

```
33.   8    4   5
34.  178   5  111
35.  180  111 112
36.   0.00001
37.  90  85  65 137 138 139 140
38.   23     20.00
39.   1.0E-09
40.   400000.        0.   100000.        0.
41.   23     20.00
42.   1.0E-08
43.   400000.        0.   100000.        0.
   /*
   //
```

Obr. 9: Příklad řídích štítků pro krok GO
a zadání dat

Sz.4405 V

L i t e r a t u r a:

[1] J.Nečas, I.Hlaváček, J.Haslinger: Optimalizace termoelastických systémů. Část I. Výzkumná zpráva Sz 4380 V, Plzeň 1983.

[2] J.Nečas, I.Hlaváček: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles., SNTL Praha 1983

[3] J.Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Prague 1967.

[4] O.Pironneau: Optimal shape design for elliptic systems.