

Československá akademie věd  
Ústav teorie informace a automatizace

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ TERMOELASTICKÝCH PROCESŮ I

Zprávu vypracovali : RNDr. J. Jarušek, CSc.  
Ing. T. Roubíček

Zpráva č. : 1422

Vedoucí sektoru : RNDr. A. Tuzar, CSc.

Datum vyhotovení:

Ředitel ústavu : akademik S. Kubík

prosinec 1986

---

Počet stran : 59

Počet výtisků : 12

Počet obrázků: 1

(z toho 6 pro k.p. Škoda Plzeň, ÚVZÚ)

Počet tabulek: 0

Počet fotografií: 0

## Obsah

Úvod . . . . .	1
I. Kvalitativní odhady chování teploty předlisku a napětí v něm při singulárních režimech ohřevu . . . . .	2
1. Anizotropní Sobolevovy prostory hilbertovského typu s "necelou derivací" . . . . .	4
2. Příklad $\Omega$ je pás a rovnice jsou lineární . . . . .	10
3. Obecnější případy . . . . .	22
II. Rychlý algoritmus pro syntézu multi-optimálního řízení pro systémy s monotónní odezvou . . . . .	37
II.1 Řízený systém a algoritmus řízení . . . . .	37
II.2 Vlastnosti algoritmu, multi-optimálnost sestrojene- ho řízení . . . . .	41
II.3 Příklad systému s monotónním chováním . . . . .	48
II.4 Test algoritmu na modelovém příkladu . . . . .	53
Literatura . . . . .	58

## ÚVOD

Zpráva je výsledkem spolupráce ÚTIA ČSAV s ÚVZÚ k.p. Škoda Plzeň na optimalizaci ohřevu velkých předlisků. V její první části se analyzuje chování teploty a napětí v předlisku v případě singulárních režimů ohřevu a formulují se postačující podmínky pro omezenost a spojitost napětí při těchto režimech.

Ve druhé části se navrhuje a za jistých předpokladů (zejména určité monotónie) analyzuje efektivní algoritmus řízení na základě okamžitého sledování maximálního napětí s možností předvídání budoucích situací. Na jednorozměrném lineárním příkladě se ukazuje reálnost zmíněných předpokladů. Jsou uvedeny graficky zpracované výsledky testování algoritmu na dvourozměrné nelineární úloze ohřevu ocelového tělesa ve vozové ohřívací peci s uvažováním překrytí zace materiálu.

Zpráva navazuje na výsledky spolupráce ÚTIA ČSAV a k.p. Škoda Plzeň, ÚVZÚ, v minulé pětiletce. Řeší některé významné dílčí problémy tématu spolupráce a podtrhuje jeho složitost a náročnost jak po stránce teoretické tak i numerické. Řešení dalších problémů se předpokládá v následujících dílech.

# I. KVALITATIVNÍ ODHADY CHOVÁNÍ TEPLoty PŘEDLIŠKU A NAPĚTÍ V NĚM PŘI SINGULÁRNÍCH REŽIMECH OHŘEVU.

Výzkumná zpráva ÚTIA č. 1366 "Teoretické řešení časově optimálního ohřevu velkých výkovek s ohledem na zachování jejich celistvosti" [5] charakterizovala mj. chování teploty a napětí v předlišku za předpokladu regularity režimu ohřevu - předpokládalo se, že teplota v peci je konstantní v prostorových proměnných a lipschitzovská v čase. Režim s kvalitami horšími je nutno považovat za singulární - pro takové režimy nejsou splněny v literatuře (viz např. [7], [8], ...) obvyklé předpoklady. Např. je-li předlišek vkládán do pece o jiné teplotě než je sám (obvykle je pec teplejší), nejsou splněny podmínky kompatibility - tj. počáteční podmínka rovnice vedení tepla nesplňuje podmínku okrajovou. Takový režim je třeba uvažovat jako skokový - těleso se zpočátku nachází v konstantním chladnu, kde podmínky kompatibility splněny jsou, a pak je vloženo do horké pece.

Účelem této kapitoly je rozbor odezvy teploty a napětí v tělese na takové singulární režimy, neboť v praxi nelze zaručit splnění např. podmínek kompatibility. Vzhledem k potížím důkazové techniky neřeší problematiku definitivně a dává jen částečné odpovědi - ve výzkumu bude třeba pokračovat. Hlavním cílem je přitom dokázat omezenost a spojitost napětí při singulárních režimech, aby stavové omezení na napětí mělo vůbec smysl.

Rovnici vedení tepla budeme nadále uvažovat ve tvaru

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u \quad \text{na } Q = (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = q(T) - q(\Lambda u) \quad \text{na } S = (0, T) \times \partial \Omega, \\ u(0, x) = u_0 \quad \text{na } \Omega. \end{array} \right.$$



$\Omega$  je oblast tělesem zaujímaná, má hladkou hranici  $\partial\Omega$ . Původní tvar rovnice  $c\varrho(\check{u}) = \text{div}(\lambda(\check{u}) \text{grad } \check{u})$ , kde  $\check{u}$  je teplota tělesa,  $c$  měrné teplo,  $\varrho$  hustota a  $\lambda$  koeficient tepelné vodivosti (vše závislé na teplotě) převedeme do tvaru (1.1) transformací  $u = \Lambda^{-1}\check{u}$ , kde  $\Lambda^{-1}$  je primitivní funkce (=neurčitý integrál) k  $\lambda$  splňující podmínku  $\Lambda^{-1}(0) = 0$ . Protože  $\lambda$  je kladná funkce, je  $\Lambda^{-1}$  rostoucí a totéž platí pro její inverzi  $\Lambda$ . Snadno se spočte  $\beta(u) = \frac{c\varrho(\Lambda u)}{\lambda(\Lambda u)}$ . Funkci  $q$  opět uvažujeme ve tvaru  $q: \gamma \mapsto \alpha\gamma + \sigma_s \gamma^4$ , kde  $\alpha_k > 0$  je koeficient přestupu tepla a  $\sigma_s \geq 0$  koeficient sálavosti (oba se předpokládají na teplotě nezávislé). O funkci  $\beta$  předpokládejme hladkost a existenci  $\beta_0 > 0$ , že  $\beta > \beta_0$  na  $\mathbb{R}^1$ . Pro jednoduchost předpokládejme  $u_0 = 0$ .

Položíme-li  $\gamma = q \circ \Lambda$ , kde  $q$  je primitivní funkce k (teplotně závislému) koeficientu tepelné roztažnosti předlisku a označíme-li  $\sigma$  Poissonovu konstantu (nezávislou na teplotě) v vektor vnější normály na hranici tělesa, má Lamého systém pro posunutí v tvar

$$(1.2) \quad \begin{cases} (1-2\sigma) \Delta v + \text{grad } \text{div } v = (2+2\sigma) \text{grad } \gamma(u) & \text{na } Q \\ (1-2\sigma) \left( \frac{\partial v}{\partial \nu} + (\text{grad } v_i \nu)_i \right) + 2\sigma v \text{div } v = (2+2\sigma) \gamma(u) \nu & \text{na } S. \end{cases}$$

Z literatury ([7], [14], [6]...) odvodíme, že rovnice (1.1) je řešitelná i při singulárních režimech, pokud teplota pece je v prostoru  $L_\infty$ , což skokový režim splňuje. Řešení existuje v prostoru  $V$  s normou, jejíž čtverec je

$$(1.3) \quad \int_a^T (\text{grad}_x u)^2 dx dt + \sup_{t \in (0, T)} \int_\Omega u^2 dx.$$

Přitom platí věta o srovnání  $T_{\min} \leq u(x, t) \leq T_{\max}$  pro skoro všechny

na  $[t, x] \in Q$  (pro ohřev  $T_{\min} = T(0)$ ,  $T_{\max} = T(\mathcal{J})$ ). Tyto výsledky ovšem nejsou pro omezenost a spojitost napětí postačující a je třeba dalších informací o chování teploty předlisku.

V celé práci se budeme držet úmluvy, že  $|\cdot|$  značí v  $\mathbb{R}^n$  eukleidovskou normu a pro vektory  $a, b \in \mathbb{R}^n$  je  $ab$  jejich skalární součin.

## 1. ANIZOTROPNÍ SOBOLEVOVY PROSTORY HILBERTOVSKÉHO TYPU S "NECELOU DERIVACÍ".

K detailnímu studiu je možno doporučit např. [2], což je ovšem kniha čtenářsky náročná. Aparát zmíníme co nejstručněji, podrobnější výpočty jsou obsaženy např. v [3], [4].  $\Omega$  budiž oblast v  $\mathbb{R}^n$  s dostatečně hladkou hranicí.

Jak se zmiňuje např. [8] platí v  $\mathbb{R}^n$  následující Plancherelova rovnost norem

$$(1.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi,$$

kde  $u$  je libovolná funkce z  $L_2(\mathbb{R}^n)$  a  $\hat{u}$  její Fourierův obraz, tj.

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x \cdot \xi} u dx. \text{ Pro derivace tedy } \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n}| |\hat{u}|^2 d\xi,$$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kde množinu přirozených čísel  $\mathbb{N}$  uvažujeme obsahující 0. Pro naše potřeby zavedeme anizotropní Sobolevův prostor Hilbertova typu - zatím s "celou derivací". Nechť vektor  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Pak  $H^\alpha(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega); \|u\|_{\alpha, \Omega} < +\infty\}$ , kde normu  $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega}$  definujeme vztahem

$$(1.5) \quad \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 = \int_{\Omega} u^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right)^2 dx = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2, \alpha_i \in \mathbb{N}, i=1, \dots, n.$$

Je-li  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , zřejmě

$$(1.6) \quad \|u\|_{\alpha, \mathbb{R}^n}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left( 1 + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2\alpha_i} \right) |\hat{u}|^2 d\xi.$$

V (1.5) a (1.6) budeme přitom předpokládat, že v sumách vynecháme členy, pro něž  $\alpha_i = 0$ .

V [8], [4] ... je zmíněna technika umožňující za podmínek hladkosti  $\partial\Omega$  rozšířit funkce ze Sobolevových prostorů na  $\Omega$  na funkce z týchž prostorů na  $\mathbb{R}^n$ . Definujeme-li pro  $u$  na  $\Omega$  takové rozšíření  $\Phi(u)$ , pak "rozšiřovací operátor"  $\Phi: H^\alpha(\Omega) \rightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n)$  má vlastnost  $\|\Phi(u)\|_{\alpha, \mathbb{R}^n} \leq k \|u\|_{\alpha, \Omega}$ , kde konstanta závisí na  $\Omega$  a  $\alpha$ , nikoli na funkci  $u$ . Opačná nerovnost  $\|u\|_{\alpha, \Omega} \leq \|\Phi(u)\|_{\alpha, \mathbb{R}^n}$  je evidentní. Technika je dobře vyvinuta pro izotropní případ (tj.  $\alpha_i = \alpha_1$  pro každé  $i = 1, \dots, n$ ), pro případ  $\Omega$  je pás rovnoběžný s některou z os, pro případ funkcí jež jsou nulové v okolí  $\partial\Omega$  (srov. [4]) a pro vhodné kombinace těchto případů. Analog rozšiřovací techniky a narovnávání hranice užijeme v závěru kapitoly.

Pro libovolnou funkci  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  zaveďme nyní  $\Delta_1^h f(x) \equiv f(x+h) - f(x)$   
 $f(x+h) \equiv f_{-h}(x)$ . Pro  $n=1, 2$  a číslo  $\alpha \in (0, 1)$  odvodíme

$$(1.7) \quad I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta_1^h f(x)}{|h|^{n+2\alpha}} dh dx = c_{n,1}(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\alpha} |\hat{f}|^2 d\xi,$$

$$c_{n,1}(\alpha) = 2^{2-2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \delta}{|\delta|^{1+2\alpha}} d\delta \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+\nu^2)^{1+\alpha}} \right)^{n-1}.$$

Výpočet je následující:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 \frac{|e^{ih\xi} - 1|^2}{|h|^{n+2\alpha}} dh d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 \frac{|2 \sin \frac{h\xi}{2}|^2}{|h|^{n+2\alpha}} dh d\xi.$$

Pro  $n=1$  substituujeme  $\delta = \frac{h\xi}{2}$  a dostaneme okamžitě výsledek.

Pro  $n=2$  substituujeme nejprve  $\delta = \frac{h^1 \xi^1 + h^2 \xi^2}{2}$  (tj.  $\delta_1 = \frac{h\xi}{2}$ , kde

součin je součinem skalárním) a  $\delta_2 = \frac{h_1 \xi_1 - h_2 \xi_2}{2}$ . Po vhodné úpravě provedeme ještě substituci  $\delta = \delta_1, \nu = \frac{\delta_2 |\xi|^2}{2\xi_1 \xi_2 \delta_1} + \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{2\xi_1 \xi_2}$

a dostaneme výsledek. Podrobnosti výpočtu viz [3], [4], [10].

(1.7) dává možnost rozšířit definici Sobolevova prostoru na případy, kdy složky  $\alpha$  nejsou celými čísly. Označíme  $e_i$   $i$ -tý bázový vektor  $\mathbb{R}^n$  ( $i$ -tá složka  $e_i$  rovna 1, ostatní nulové), nechť  $\mathcal{L} \text{ in } e_i = \{y e_i; y \in \mathbb{R}^1\}$ . Pro množinu  $M \subset \mathbb{R}^1$  označme  $\chi_M: y \mapsto \begin{cases} 1 & y \in M \\ 0 & y \notin M \end{cases}$  její charakteristickou funkci. Pak norma  $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega}$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 &= \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \chi_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}(\alpha_i) \left\| \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1 - \chi_M(\alpha_i)}{c_{1,1}(\{\alpha_i\})} \right. \\ &\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^1} \left( \frac{\Delta s e_i}{|s|^{\frac{1}{2} + \{\alpha_i\}}} \frac{\partial^{\{\alpha_i\}}}{\partial x_i^{\{\alpha_i\}}} u(x) \right)^2 ds dx \Big] = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \chi_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}(\alpha_i) \left\| \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1 - \chi_M(\alpha_i)}{c_{1,1}(\{\alpha_i\})} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{\left( \frac{\partial^{\{\alpha_i\}}}{\partial x_i^{\{\alpha_i\}}} u(x) - \frac{\partial^{\{\alpha_i\}}}{\partial y_i^{\{\alpha_i\}}} u(y) \right)^2}{|x - y|^{1 + 2\{\alpha_i\}}} dx dy \right] \end{aligned}$$

je pro  $\Omega = \mathbb{R}^n$  rovna (1.6) a její poslední verze má smysl pro každou oblast  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . [č] zde ovšem značí celou a {č} zlomkovou část  $\check{c} \in \mathbb{R}^1$ , tj.  $[\check{c}] \in \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ ,  $\{\check{c}\} \in (0, 1)$  a  $\check{c} = [\check{c}] + \{\check{c}\}$

Nazvěme pásem (pásovou oblastí) v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  oblast tvaru  $\mathbb{R}^{n-1} \times (a_0, b_0)$ ,  $-\infty < a_0 < b_0 < +\infty$ . Použití rozšiřovacího operátoru, a vět o vnoření v aplikacích omezíme na pásy v  $\mathbb{R}^3$  nebo v  $\mathbb{R}^2$ . Proto se v dalším prakticky lze omezit na oblasti tohoto typu.

V obvyklém zavedení  $H^\alpha$  se ovšem uvažují všechny  $L_2$  normy derivací až do řádu  $[\alpha_i]$  a pro necelá  $\alpha_i$  ještě diferenční normy uvedené v (1.8), ovšem naše norma je takto zavedené normě ekvivalentní, což se pro  $\Omega = \mathbb{R}^n$  dokáže přímým užitím Fourierovy transformace a Hölderovy nerovnosti, pro pás  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  s pomocí "rozšiřovacího operátoru"  $\Phi$  a výsledku pro  $\mathbb{R}^n$ .

Vzorce (1.7) lze zobecnit. Abychom nemuseli zavádět půlkroky či dvojnásobné kroky a mohli zachovat symetrii v posunech argumentů funkcí, omezíme se zde na  $k = 2m$ , ovšem pro lichá  $k$  bychom obdrželi obdobné výsledky.

Zavedeme

$$(1.9) \quad \Delta_k^h f(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j f(x + (\frac{k}{2} - j)h) = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-1)^j f(x + (m-j)h)$$

Nyní pro  $n=1, 2$  a  $\alpha \in (0, k)$  dostaneme

$$(1.10) \quad I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_k^h f(x))^2}{|h|^{n+2\alpha}} dh dx = c_{n,k}(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 |\xi|^{2\alpha} d\xi,$$

$$c_{n,k}(\alpha) = 2^{2k-2\alpha} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin^{2k} t}{t^{1+2\alpha}} dt \left( \int_{\mathbb{R}^1} \frac{dv}{(1+v^2)^{1+\alpha}} \right)^{n-1}$$

Odvození (1.10) je stejné jako odvození (1.7) :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 \frac{|e^{\frac{ikh\xi}{2}} - e^{-\frac{ikh\xi}{2}}|^{2k}}{|h|^{n+2\alpha}} dh d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 \frac{(2 \sin \frac{h\xi}{2})^{2k}}{|h|^{n+2\alpha}} dh d\xi$$

a provedeme tytéž úpravy a substituce jako při (1.7).

Význam techniky prostorů s "necelými derivacemi", posunů v argumentech funkcí a Fourierovy transformace spočívá v možnosti užití vět o vnoření. Pro Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$  a  $\alpha_0 \in (0, 1)$  zavedeme prostor  $H^{\alpha_0}(a, b; \mathcal{H})$  normou :

$$(1.11) \quad \|f\|_{a,b,\mathcal{H},\alpha_0}^2 = \int_a^b \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt + \int_a^b \int_a^b \frac{\|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{H}}^2}{(t-s)^{1+2\alpha_0}} dt ds, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty,$$

tj.  $H^{\alpha_0}(a, b; \mathcal{H}) = \{ f : (a, b) \rightarrow \mathcal{H}, \|f\|_{a,b,\mathcal{H},\alpha_0} < +\infty \}$ . Nechť  $\mathcal{H} = H^\alpha(\Omega)$  pro vhodný multiindex  $\alpha$ . Pak platí věta o vnoření [8]:

Věta 1. Prostor  $H^{\alpha_0}(a, b; \mathcal{H})$  je spojitě vnořen do  $C_0(a, b; \mathcal{H})$ , pokud  $\alpha_0 > \frac{1}{2}$ .

Prostorem  $C_0(a, b; \mathcal{H})$  ovšem chápeme obvyklý prostor spojitých funkcí z  $(a, b)$  do  $\mathcal{H}$  s čebyševovskou normou. Důkaz lze pro pásové oblasti opět opřít o Fourierovou transformaci a "rozšiřovací operátor" - srov. [10], lemma 3.5. Pro anizotropní Sobolevovy

prostory platí následující věta - viz [2], jejíž důkaz pro  $\Omega = \mathbb{R}^n$  lze též provést matematickou indukcí s použitím věty 1, Fourierovy transformace a Hölderovy nerovnosti, pro pásové oblasti za pomoci "rozšiřovacího operátoru"  $\Phi$ , kde  $\bar{\Omega}$  je uzávěr  $\Omega$ .

Věta 2. Má-li  $\Omega$  dostatečně hladkou hranici,  $H^\alpha(\Omega)$  lze spojitě vnořit do  $C_0(\bar{\Omega})$ , je-li  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} < 1$ .

Nyní se v kontextu Sobolevových prostorů s "necelou derivací" zmíníme o chování singulárních teplotních režimů ohřevu. Snadno spočteme, že je-li  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^1$  definována předpisem

$$f = k_1 \mathcal{I}_{\langle a, c \rangle} + k_2 \mathcal{I}_{\langle c, b \rangle}, \text{ tj } f \text{ má v } c \text{ skok velikosti } |k_2 - k_1|, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^1,$$

pak pro seminormu  $\| \cdot \|'_{\frac{1}{2} - \varepsilon, (a, b)}$  platí při libovolném  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}), a, b \in \mathbb{R}^1$

$$(1.12) \quad \|f\|_{\frac{1}{2} - \varepsilon, (a, b)}'^2 \equiv \int_a^b \int_a^b \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2 - 2\varepsilon}} dx dy = 2|k_2 - k_1|^2 \int_a^c \int_c^b \frac{dx dy}{|x - y|^{2 - 2\varepsilon}} =$$

$$= |k_2 - k_1|^2 \frac{(b - a)^{2\varepsilon}}{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)} \left[ \left( \frac{b - c}{b - a} \right)^{2\varepsilon} + \left( \frac{c - a}{b - a} \right)^{2\varepsilon} - 1 \right],$$

přičemž výraz v hranaté závorce lze odhadnout číslem  $2^{1 - 2\varepsilon} - 1$ .

Je tedy

$$(1.13) \quad \|f\|'_{\frac{1}{2} - \varepsilon, (a, b)} \leq |k_1 - k_2| \mathcal{C}(b - a, \varepsilon), \text{ kde}$$

$$\mathcal{C}(b - a, \varepsilon) = (b - a)^\varepsilon \sqrt{\frac{2^{1 - 2\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)}}$$

Z (1.13) dostaneme okamžitě pro  $f$  neklesající a po částech konstantní

$$(1.14) \quad \|f\|'_{\frac{1}{2} - \varepsilon, (a, b)} \leq |f(b) - f(a)| \mathcal{C}(b - a, \varepsilon).$$

Je-li  $f$  libovolná spojitá neklesající funkce, pak existuje posloupnost po částech konstatních neklesajících funkcí  $\{f_n\}$  taková, že  $f_n \rightarrow f$  v  $C_0(a, b)$ . Protože dle (1.14) je  $\{f_n\}$  omezená posloupnost v Hilbertově prostoru  $H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(a, b)$ , existuje pro vybrané podposloupnosti slabá limita  $g$ , ale ta musí být podle věty 1 rovna  $f$ . Odsud  $f_n \rightarrow f$  v  $H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(a, b)$ ,  $f \in H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(a, b)$  a splňuje (1.14). Výsledek lze rozšířit na libovolnou funkci  $f$  mající na intervalu  $\langle a, b \rangle$  konečnou variaci, již označíme  $\text{var}_{(a, b)} f$ . (1.14) bude zde mít podobu

$$(1.15) \quad \|f\|'_{\frac{1}{2}-\epsilon, (a, b)} \leq 2 \text{var}_{(a, b)} f \cdot C(b-a, \epsilon).$$

Speciálně (1.14) platí pro každou neklesající nebo nerostoucí funkci na  $\langle a, b \rangle$ .

Výsledkem těchto faktů je, že singulární režimy, jež jsou  $k$ -hladké v prostorových proměnných a mají v izolovaných bodech skoky v čase a jinak jsou v čase "rozumné" lze uvažovat jako prvky prostoru  $H^{\frac{1}{2}-\epsilon, k}((0, T) \times \partial\Omega)$ , kde index  $k$  označuje existenci  $k$ -té zobecněné (ve smyslu integrovatelnosti v kvadrátu) derivace v prostorových proměnných  $\partial\Omega$ .

Z Plancherelovy rovnosti (1.4) se snadno odvodí

$$(1.16) \quad \int_{\mathbb{R}^n} uv \, dx = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \overline{\hat{v}} \, dx, \quad u, v \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

kde pruh značí komplexní sdružení. Z tohoto faktu a (1.6) pak snadno odvodíme následující charakteristiku duálního prostoru k prostoru  $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ , jenž budeme označovat

$$(1.17) \quad H^{-\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{u; \|u\|_{-\alpha, \mathbb{R}^n} < +\infty\}, \quad \text{kde}$$

$$\|u\|_{-\alpha, \mathbb{R}^n}^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \left(1 + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2\alpha_i}\right)^{-1} d\xi,$$



## 2. PŘÍPAD $\Omega$ JE PÁS A ROVNICE JSOU LINEÁRNÍ

Zabývat se případem jednoduché oblasti, jakou je (nekonečný) pás v  $\mathbb{R}^3$  (slovo "pás" budeme uvažovat nezávislé na dimenzi, pro  $n=3$  by z technických důvodů bylo vhodnější hovořit o (nekonečné) desce) - budeme jej uvažovat jakožto množinu  $\mathbb{R}^2 \times (0, r)$  - není samoúčelné. Pro lineární rovnice s konstantními koeficienty lze řešení úlohy na pásu explicitně vyjádřit a přitom výsledky ohledně kvalitativních odhadů a regularity jsou optimální - složitější oblasti a rovnice je mohou jen zhoršit. Navíc výsledky obdržené pro pás podstatně využijeme při dokazování regularity řešení obecnějších úloh.

V této části budeme tedy předpokládat pro rovnici vedení tepla  $\beta(u) = \text{konst.}$  - pro jednoduchost zvolíme konstantu rovnu 1. Nejprve se budeme věnovat případu, kdy pro  $x_3 = 0$  máme okrajovou podmínku  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ , pro  $x_3 = r$ , pro jednoduchost volíme  $r=1$ , podmínku  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = T - u$ , což je linearizace okrajové podmínky (1.1). Situace odpovídá symetrickému pásu (desce) stejně ohřivanému z obou stran. Přitom nulovou počáteční podmínku přesuneme do  $-\infty$  a režim ohřevu bude definován pro  $t \in \mathbb{R}^1$  - o rozšiřování režimu ohřevu viz počátek následující části.  $T$  budeme uvažovat jako obecný režim ohřevu z prostoru  $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$   $k > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ , libovolné. Techniku Fourierovy transformace si zde přizpůsobíme tak, že budeme transformovat jen v proměnných  $t, x_1, x_2$ , nikoli v  $x_3$ . Pro  $u \in L_2(Q)$ ,  $Q = \mathbb{R}^3 \times \langle 0, 1 \rangle$  definujeme

$$(1.18) \quad \tilde{u}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x_1, x_2, x_3) e^{i(t\tau_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dt dx_1 dx_2.$$



Rovnice vedení tepla má po provedení této parciální Fourierovy transformace tvar

$$(1.19) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} = (i\tau_0 + |\xi|^2) \tilde{u} \text{ na } Q, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, 1) = \hat{T}(\tau_0, \xi_1, \xi_2) - \tilde{u}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, 1) \text{ na } \mathbb{R}^3$$

a jejím řešením je zřejmě funkce

$$(1.20) \quad \tilde{u}(\tau_0, \xi, x_3) = \frac{\hat{T} \operatorname{ch}(x_3 \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2})}{\sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2} \operatorname{sh} \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2} + \operatorname{ch} \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2}}$$

Naším cílem je pro toto  $\tilde{u}$  odhadnout seminormu  $\|\tilde{u}\|'_{\frac{1}{2}, 1} \equiv \|\tilde{u}\|'_{\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \Omega} \equiv \sqrt{\|\tilde{u}\|_{\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \Omega}^2 - \|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)}^2}$ , jež se jeví jako nejpřirozenější pro charakterizaci řešení parabolických rovnic 2. řádu (srov. [7]). Poznamenejme, že díky Plancherelově rovnosti jsou zmíněné normy a seminormy rovny odpovídajícím sobolevským seminormám a normám funkce  $u$ , jejímž je  $\tilde{u}$  obrazem, čímž lze tyto seminormy (normy) navzájem ztotožňovat. Platí

$$(1.21) \quad \|\tilde{u}\|_{\frac{1}{2}, 1}^{\prime 2} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \frac{|\hat{T}|^2}{|d \operatorname{sh} d + \operatorname{ch} d|^2} \left[ (|\tau_0| + |\xi|^2) |\operatorname{ch}(dx_3)|^2 + |d|^2 |\operatorname{sh}(dx_3)|^2 \right] dx_3 d\tau_0 d\xi, \quad d = \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2}.$$

Nyní spočteme ( $\operatorname{Re} d$  značí reálnou a  $\operatorname{Im} d$  imaginární část  $d$ )

$$(a) \quad |d|^2 = |d|^2 = \sqrt{\tau_0^2 + |\xi|^4}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\tau_0^2 + |\xi|^4} + i \operatorname{sign} \tau_0 \sqrt{\tau_0^2 + |\xi|^4 - |\xi|^2} \right), \\ \forall [\tau_0, \xi] \in \mathbb{R}^3 \quad |\operatorname{Im} d| \leq \operatorname{Re} d, \quad |d| < \sqrt{2} \operatorname{Re} d,$$

$$(b) \quad |ch(dx_3)|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{Re dx_3} (\cos(Im dx_3) + i \sin(Im dx_3)) + e^{-Re dx_3} (\cos(Im dx_3) - i \sin(Im dx_3)) \right|^2 = \\ = \frac{1}{4} \left[ e^{2Re dx_3} + e^{-2Re dx_3} \right] + \frac{1}{2} \cos(2 Im dx_3),$$

$$(c) \quad |sh(dx_3)|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{Re dx_3} (\cos(Im dx_3) + i \sin(Im dx_3)) - e^{-Re dx_3} (\cos(Im dx_3) - i \sin(Im dx_3)) \right|^2 = \\ = \frac{1}{4} \left[ e^{2Re dx_3} + e^{-2Re dx_3} \right] - \frac{1}{2} \cos(2 Im dx_3),$$

$$(d) \quad |dshd + chd|^2 = \frac{1}{4} \left[ e^{2Re d} (|d|^2 + 2Re d + 1) + e^{-2Re d} (|d|^2 - 2Re d + 1) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[ (1 - |d|^2) \cos(2 Im d) - 2Im d \sin(2 Im d) \right]$$

$$(e) \quad \int_0^1 (|\tau_0| + |\xi|^2) |ch(dx_3)|^2 + |d|^2 |sh(dx_3)|^2 dx_3 = \\ = \frac{\tau_0 + |\xi|^2 + \sqrt{|\tau_0|^2 + |\xi|^4}}{4\sqrt{2} \sqrt{|\tau_0|^2 + |\xi|^4} + |\xi|^2} (e^{2Re d} - e^{-2Re d}) + \frac{\tau_0 + |\xi|^2 - \sqrt{|\tau_0|^2 + |\xi|^4}}{2\sqrt{2} \sqrt{|\tau_0|^2 + |\xi|^4} - |\xi|^2 \operatorname{sign} \tau_0} \sin(2 Im d)$$

O výrazu (d) platí, že má jakožto funkce  $d$  kladné infimum. Dosa-  
díme-li výsledky (d), (e) do (1.21) a zkrátíme-li  $e^{2Re d}$  ve vznik-  
lém zlomku, vidíme, že platí odhad s konstantami  $0 < k_1 < k_2 < +\infty$  nezávis-  
lými na  $\hat{T}$

$$(1.21) \quad k_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{T}|^2}{1 + |\tau_0|^{\frac{1}{2}} + |\xi|} d\tau_0 d\xi \leq \| \tilde{u} \|_{\frac{1}{2}, 1}^2 \leq \\ \leq k_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{T}|^2}{1 + |\tau_0|^{\frac{1}{2}} + |\xi|} d\tau_0 d\xi,$$

neboť součinitel  $|\hat{T}|^2$  ve vyjádření  $\|\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},1}^{1/2}$  je omezený v okolí  $[\alpha_0, \xi] = [0, 0, 0]$ . Z (1.22) je pak již evidentní, že pro  $T \in H^{\frac{1}{2}-\epsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$  příslušné řešení  $\tilde{u} \in H^{\frac{5}{4}-\epsilon, k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, 1}(\Omega)$ . Je-li  $k \geq \frac{1}{2}$ , je  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L_2(Q)$  pro  $i=1,2$  a z rovnice vedení tepla i  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in L_2(Q)$ .

Výsledek v normálovém směru  $x_3$  lze ještě zlepšit. Budeme odhadovat

$$(1.23) \quad I = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\hat{T}|^2 |d|^4}{|d \operatorname{sh} d + \operatorname{ch} d|^2} \frac{|\operatorname{ch}(dy) - \operatorname{ch}(dz)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz,$$

což je až na konstantu čtverec seminormy odpovídající " $\frac{5}{2}-\epsilon$ -té derivaci" řešení rovnice (1.19) v proměnné  $x_3$ . Rozepíšeme  $d = |d|e$ , kde  $e$  je příslušná komplexní jednotka. Platí

$$(1.24) \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\operatorname{ch}(dy) - \operatorname{ch}(dz)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz = |d|^{-2\epsilon} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\operatorname{ch}(ey) - \operatorname{ch}(ez)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz$$

Integrál přes čtverec  $\langle 0, |d| \rangle \times \langle 0, |d| \rangle$  odhadneme 3 integrály.  
 1. přes množinu  $M_1 = \langle 1, |d| \rangle \times \langle 0, y-1 \rangle$ , 2. přes množinu  $M_2 = \langle 0, |d|-1 \rangle \times \langle y+1, |d| \rangle$ , 3. přes množinu  $M_3 = \langle 0, |d| \rangle \times \langle y-1, y+1 \rangle$ . První dva

integrály lze odhadnout

$$\int_{M_1 \cup M_2} \frac{2|\operatorname{ch}(\epsilon y)|^2 + 2|\operatorname{ch}(\epsilon z)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz = 4 \int_{M_1 \cup M_2} \frac{|\operatorname{ch}(\epsilon y)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz \leq$$

(1.25)

$$\leq \frac{8}{1-2\epsilon} \int_0^{|\operatorname{Im} d|} |\operatorname{ch}(\epsilon y)|^2 dy = \frac{8}{1-2\epsilon} \left[ \frac{1}{2\operatorname{Re} \epsilon} (e^{2\operatorname{Re} d} - e^{-2\operatorname{Re} d}) + \frac{1}{2\operatorname{Im} \epsilon} \sin(\operatorname{Im} d) \right].$$

Zbývající odhadujeme takto

$$\int_0^{|\operatorname{Im} d|} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \frac{|\operatorname{ch}(\epsilon y) - \operatorname{ch}(\epsilon z)|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz = \int_0^{|\operatorname{Im} d|} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \frac{|\epsilon \int_y^z \operatorname{sh} \epsilon s ds|^2}{|y-z|^{2-2\epsilon}} dy dz \leq$$

(1.26)

$$\leq \int_0^{|\operatorname{Im} d|} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \int_y^z \frac{|\operatorname{sh} \epsilon s|^2 ds}{|y-z|^{1-2\epsilon}} dy dz.$$

V posledním integrálu zvětšíme obor pro  $s$  na  $\langle \gamma-1, \gamma+1 \rangle$ , zaměníme pořadí integrace a dále počítáme :

$$\int_0^{|\operatorname{Im} d|} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} |\operatorname{sh} \epsilon s|^2 ds \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \frac{dz}{|y-z|^{1-2\epsilon}} dy \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{|\operatorname{Im} d|} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} |\operatorname{sh} \epsilon s|^2 ds dy =$$

(1.27)

$$= \frac{1}{4\epsilon} \left[ \frac{e^{2\operatorname{Re} \epsilon} - e^{-2\operatorname{Re} \epsilon}}{(2\operatorname{Re} \epsilon)^2} (e^{2\operatorname{Re} d} - e^{-2\operatorname{Re} d}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{8\epsilon(\operatorname{Im} \epsilon)^2} \left[ \cos(2\operatorname{Im} \epsilon(|\operatorname{Im} d| + 1)) - \cos(2\operatorname{Im} \epsilon(|\operatorname{Im} d| - 1)) \right]$$

Z (1.25) a (1.27) pak týmiž postupy jako při získání (1.22) odhadneme seminormu (1.23) pomocí normy  $\|T\|_{\frac{1}{2}-\varepsilon, 1-\varepsilon, 1-\varepsilon, \mathbb{R}^3}$ , a tedy pro  $k > 1-\varepsilon$  získáme  $u \in H^{\frac{5}{4}-\varepsilon, k+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}, \frac{5}{2}-\varepsilon}(Q)$ .

Dokázali jsme tedy, že řešení rovnice (1.19) má v čase chování o " $\frac{3}{4}$  derivace" lepší a v tečných prostorových proměnných o " $\frac{3}{2}$  derivace" lepší než předepsaný vnější teplotní režim. Pro  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  jsme odhadli, že je-li  $T \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$ ,  $k > 1-\varepsilon$ , je chování řešení (1.19) v normálovém směru alespoň 2krát lepší než v čase. Poznamenejme ovšem, že ani libovolně vysoká hladkost  $T$  v tečných proměnných nám neumožní použít větu 2 a dokázat, že  $\frac{\partial u}{\partial x_3} \in C_0(Q)$ . Její zobecnění pro derivace má totiž za předpokladu dostatečných kvalit hranice oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tvar

věta 2': Je-li  $u \in H^\alpha(\Omega)$ , pak  $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\prod_{i=1}^n \partial x_i^{\alpha_i}} \in C_0(\Omega)$ ,

jestliže  $\sum_{i=1}^n (\frac{1}{2} + \alpha_i) \frac{1}{\alpha_i} < 1$ .

Je-li tedy  $i = 1, 2, k > \frac{7}{2}$ ,  $T \in M^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$ , pak

$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in C_0(Q)$  avšak pro žádné  $k > 0$  a  $\varepsilon > 0$  není  $(\frac{2}{5} + \varepsilon) +$

$+(\frac{3}{5} + \varepsilon) + \frac{1}{k} < 1$ . Pokud se zabýváme dvourozměrným pásem pak pro  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in C_0(Q)$  stačí, aby  $k > \frac{9}{4}$ , avšak ani pro tento

případ podmínka  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k}(\mathbb{R}^2)$  není postačující pro

$\frac{\partial u}{\partial x_y} \in C_0(Q)$  pro žádné  $k > 0$ .

Ke zkoumání regularity napětí (posunutí) je vzhledem k tomu, že čas vystupuje v (1.2) jen jako parametr, nutno interpretovat výsledky regularity v prostoru  $C_0(\mathbb{R}^1; H^a(\Omega))$ . Režim ohřevu  $T$  můžeme předpokládat takový, že  $T = 0$  v  $(-\infty, 0)$ , resp. v případě potřeby i na intervalu  $(-\infty, \check{c})$ ,  $\check{c} > 0$ . Pro zajištění možnosti provést Fourierovu transformaci i v proměnné  $x_3$  aplikujeme "rozšiřovací operátor"  $\Phi$ .  $\Phi(u)$  budeme nadále značit jako  $u$ . Víme, že pro  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$ ,  $k \geq 1$  je  $u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{5}{4}-\varepsilon, k+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}, \frac{5}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^4)$ . Prostor  $H^{\frac{1}{2}+\eta}(\mathbb{R}^1; H^a(\mathbb{R}^3))$  má pro  $a \in \mathbb{R}^3, a_i \geq 0, i=1,2,3, \eta > 0$  normu

$$(1.28) \quad \int_{\mathbb{R}^4} |\hat{u}|^2 (1+|\tau|_0^{1+2\eta}) \left(1 + \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^{a_i}\right) d\xi d\tau_0.$$

Protože platí Hölderova nerovnost

$$(1.29) \quad \frac{1+2\eta}{2\alpha_0} + \frac{a_i}{\alpha_i} = 1 \implies |\xi_i|^{2a_i} |\tau_0|^{1+2\eta} \leq \frac{1+2\eta}{2\alpha_0} |\tau_0|^{2\alpha_0} + \frac{a_i}{\alpha_i} |\xi_i|^{2\alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

a  $\alpha_0 < \frac{5}{4}$ , máme pro  $a_i < \frac{3}{5} \alpha_i$   $u \in H^{\frac{1}{2}+\eta}(\mathbb{R}^1; H^a(\mathbb{R}^3))$  pro dostatečně malé  $\eta > 0$ . To znamená, že  $a_i < \frac{3}{5} k + \frac{9}{10}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $a_3 < \frac{3}{2}$ . Použitím inverze rozšiřovacího operátoru a věty 1 dostaneme

$$(1.30) \quad u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_0(\mathbb{R}^1; H^{\frac{3}{5}k + \frac{9}{10} - \varepsilon, \frac{3}{5}k + \frac{9}{10} - \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon}(\Omega)).$$

Tedy např. pro  $k > \frac{55}{30}$  je  $u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_0(\mathbb{R}^1; H^{2,2,\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega))$ ,

dokonce  $u \in C_0(\mathbb{R}^1; H^{2+\eta(k), 2+\eta(k), \frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega))$ , pro vhodné  $\eta(k) > 0$ .

Nyní se budeme zabývat regularitou (omezeností) napětí. Rovnici (1.2) zlinealizujeme: předpokládejme, že  $\gamma(u) = E \mathcal{A} u$ , kde  $E$  je Youngův modul pružnosti  $\mathcal{A}$  vhodná konstanta - pro jednoduchoť nechť nezávisí na prostorových proměnných. Ve složkách tenzoru napětí má Lamého systém tvar

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}(v)}{\partial x_j} = E \mathcal{A} \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ na } \Omega, \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in \mathbb{R}^1$$

(1.31)

$$T_0(v) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(v) \nu_j = E \mathcal{A} u \nu_i \text{ na } \partial \Omega, \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in \mathbb{R}^1$$

Pro testovací funkci  $w$  označme nyní  $e_{ij}(w)$  složky tenzoru malé deformace. Pak

$$\int_{\Omega} \tau_{ij}(v) e_{ij}(w) dx = \int_{\partial \Omega} T_0(v) w dS - E \mathcal{A} \int_{\Omega} \operatorname{grad}_x u \cdot w dx =$$

(1.32)

$$= E \mathcal{A} \int_{\Omega} u \operatorname{div} w dx.$$

Označme  $A$  formu  $s$  reprezentací pomocí inverzní matice  $k$  matici Hookova zákona. Pak platí pro libovolný vhodný testovací tenzor  $v \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^9)$

$$(1.33) \quad \int_{\Omega} A(\tau, v) dx = \tilde{\mathcal{K}} \int_{\Omega} u (v_{11} + v_{22} + v_{33}) dx, \text{ kde } \tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(1-2\sigma)$$

a  $\sigma$  je Poissonova konstanta.

Nyní ukážeme, že pro  $u \in C_0(\mathbb{R}^1; H^{2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 1}(\Omega))$  je  $\tau_{ij} \in C_0(Q)$ ,  $ij = 1, 2, 3$ . Sečtením 6násobku rovnice (1.33) s  $-4$ násobkem jejího posunutí o  $h$  a  $-4$ násobkem posunutí o  $-h$ , s 1násobkem posunutí o  $-2h$  a jednonásobkem posunutí o  $2h$  (posuny v argumentu jsou ve směru tečném) při dosazení  $v = \Delta_4^h(u) = v_{-h} = v_h = v_{-2h} = v_{2h}$ , použitím Hölderovy nerovnosti na pravou stranu rovnice a známé nerovnosti  $ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon_0} + \varepsilon_0 b^2$  platné pro každou dvojici  $[a, b]$  reálných čísel a každé  $\varepsilon_0 > 0$  dostaneme s vhodným  $\tilde{\mathcal{K}} > 0$ :

$$(1.34) \quad \int_{\Omega} A(\Delta_4^h \tau(v), \Delta_4^h \tau(v)) dx \leq \frac{\tilde{\mathcal{K}}}{4\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\Delta_4^h u)^2 + \varepsilon_0 \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^3 \Delta_4^h \tau_{ij}(v)^2 dx.$$

Použitím elipticity formy  $A$ , vynásobením nerovnosti  $|h|^{-2-2\alpha}$  a integrací dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} |h|^{-2-2\alpha} \sum_{ij=1}^3 (\Delta_4^h \tau_{ij}(v))^2 dx dh \leq k_0 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} |h|^{-2-2\varepsilon} (\Delta_4^h u)^2 dx dh,$$

(1.35)



kde  $k_0 > 0$  nezávisí na  $\tau$  ani na  $u$ . Užitím (1.10) při volbě  $\alpha = 2 + \varepsilon$  dostaneme všechny složky  $\tau$  v prostoru  $H^{2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 0}(\Omega)$ . Z Kornovy nerovnosti (odpovídající posunutí v budeme uvažovat v ortogonálním doplňku prostoru všech posunutí a rotací (srov. [4]) dostaneme, že každá derivace typu  $\frac{\partial^3 v_m}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \in H^{\varepsilon, \varepsilon, 0}(\Omega)$  pro  $k, n = 1, 2, 3$  a  $i, j = 1, 2$ .

Tedy i  $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_3} \in L_2(\Omega)$  pro  $i, j = 1, 2$  odsud a použitím (1.31) totéž dokážeme pro  $\frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Tedy  $\tau_{ij} \in H^{2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 1}(\Omega)$   $i, j = 1, 2, 3$ . Je-li  $u \in C_0(0, T; H^{2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 1}(\Omega))$ , můžeme na pravou stranu (1.33)

dosadit namísto  $u(t)$  výraz  $u(t+t_0) - u(t)$  a přechodem k (1.35) ukážeme, že všechny složky  $\tau$  jsou v  $C_0(\mathbb{R}^1; H^{2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 1}(\Omega))$  a dle věty 2 též v  $C_0(\mathbb{R}^1; C_0(\bar{\Omega})) = C_0(\mathbb{R}^1 \times \bar{\Omega})$ .

Dokázali jsme tedy pro  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\mathbb{R}^3)$ ,  $k > \frac{55}{30}$ , že napětí odpovídající ohřevu je spojitá funkce. Tento výsledek lze ještě zlepšit - lze ukázat, že např. stačí  $u \in C_0(\mathbb{R}^1; H^{\frac{3}{2}+3\varepsilon, \frac{3}{2}+3\varepsilon, \frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega))$  pro vhodné  $\varepsilon > 0$ , k čemuž stačí  $k > 1$ .

Na závěr této části se budeme ještě věnovat Dirichletově úloze pro rovnici vedení tepla, neboť její výsledky dále využijeme.  $\Omega$  bude i nadále pás  $\mathbb{R}^2 \times (0, r)$ ,  $r \in (0, +\infty)$ , místo (1.19) budeme mít úlohu

$$(1.36) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} = (i\alpha_0 + |\xi|^2)\tilde{u} \quad \text{na } Q,$$

$$\tilde{u}(\alpha_0, \xi, 0) = 0, \quad \tilde{u}(\alpha_0, \xi, r) = \hat{T}(\alpha_0, \xi) [\tau_0, \xi] \in \mathbb{R}^3,$$

jejímž řešením je funkce

$$(1.37) \quad \tilde{u}(\tau_0, \xi, x_3) = \frac{\hat{T} \operatorname{sh}(x_3 \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2})}{\operatorname{sh}(r \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2})}$$

Seminormu  $\|\cdot\|_{0,1}'$  definujeme jako  $\sqrt{\|\cdot\|_{0,1,1,1,\Omega}^2 - \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}^2}$

Pak

$$\|\tilde{u}\|_{0,1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^r \frac{|\hat{T}|^2}{|\operatorname{sh}(rd)|^2} \left[ |\xi|^2 |\operatorname{sh} dx_3|^2 + \right.$$

$$(1.38) \quad \left. + |d|^2 |\operatorname{ch} dx_3|^2 \right] dx d\tau_0 d\xi, \quad d = \sqrt{i\tau_0 + |\xi|^2}.$$

Použitím (c) pro  $r = x_3$ , výpočtem vnitřního integrálu přes  $x_3$  a pokračením  $e^{2\operatorname{Re} rd}$  ve výsledku dostaneme

$$\|\tilde{u}\|_{0,1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{T}|^2 \left[ \frac{(|\xi|^2 + \sqrt{\tau_0^2 + |\xi|^4})(1 - e^{-4\operatorname{Re} dr})}{\sqrt{2} \sqrt{|\tau_0|^2 + |\xi|^4 + |\xi|^2} (1 + e^{-4\operatorname{Re} dr} - 2e^{-2\operatorname{Re} dr} \cos(\operatorname{Im} dr))} + \right.$$

$$(1.39) \quad \left. + \sqrt{2} \frac{\sqrt{|\tau_0^2 + |\xi|^2} - |\xi|^2 \sin(2\operatorname{Im} dr) e^{-2\operatorname{Re} dr} \operatorname{sign} \tau_0}{1 + e^{-4\operatorname{Re} dr} - 2e^{-2\operatorname{Re} dr} \cos(\operatorname{Im} dr)} \right] d\xi d\tau_0.$$

Výraz ve jmenovateli tj.  $(1 + e^{-4\operatorname{Re}dr} - 2e^{-\operatorname{Re}dr} \cos(\operatorname{Im}dr))$  nabývá sice v  $[\alpha_0, \xi] = [0, 0, 0]$  nuly, vně každého okolí tohoto bodu je však zdola omezený kladným číslem. Asymptotickými rozvoji příslušných funkcí v bodě  $[0, 0, 0]$  bychom ovšem ověřili, že součinitel  $|\hat{T}|^2$  v integrandu pravé strany (1.39) je omezená funkce i na okolí  $[0, 0, 0]$ . Proto existují konstanty  $0 < k_1 < k_2 < +\infty$  nezávislé na  $\hat{T}$ , že

$$\begin{aligned} k_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{T}|^2 (1 + |\xi| + |\alpha_0|^{\frac{1}{2}}) d\xi d\alpha_0 &\leq \|\tilde{u}\|_{0,1}^2 \leq \\ (1.40) \quad &\leq k_2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{T}|^2 (1 + |\xi| + |\alpha_0|^{\frac{1}{2}}) d\xi d\alpha_0 \end{aligned}$$

Stejného výsledku bychom ovšem dosáhli i se seminormou  $\|\tilde{u}\|'_{\frac{1}{2},1}$  z (1.21). Podrobnou analýzou obdobnou předešlému případu - viz (1.23) a následující výpočty - bychom dostali pro  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, k}(\Omega)$ ,  $k > 1$ :

$$(1.41) \quad \tilde{u} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{3}{4}-\varepsilon, k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega).$$

Tento výsledek by nám neumožnil dokázat omezenost napětí  $\varepsilon$  pro žádné  $k > 0$ , neboť  $a_3$  z (1.28) bude zde menší než  $\frac{1}{2}$ .

Avšak vzhledem k (1.40) je výsledek v časové a tečných prostorových proměnných optimální. A bylo by překvapivé, kdyby bylo možno dokázat lepší regularitu v proměnné normálové.

Výsledky této kapitoly lze shrnout takto : Zlepšení regularity řešení ve srovnání s regularitou okrajové podmínky je u Newtonovy okrajové podmínky značně vyšší ( $\frac{3}{4}$  "derivace" v čase,  $\frac{3}{2}$  v tečných prostorových proměnných) než u podmínky Dirichletovy ( $\frac{1}{4}$  "derivace" v čase,  $\frac{1}{2}$  v tečných prostorových proměnných).

### 3. OBECNĚJŠÍ PŘÍPADY.

V této části rozebereme některé speciální případy nelineárního systému na obecné omezené oblasti  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^3$  či v  $\mathbb{R}^2$  s hranicí třídy alespoň  $C_{1,1}$ . V takové oblasti existuje libovolně husté dělení jednotky - tj. pro každé  $\sigma > 0$  existuje konečný systém  $\mathcal{R}_\sigma = \{ \varrho_k ; 1 \leq k \leq n_\sigma \}$ , že každá z funkcí  $\varrho_k$  je hladká (lze předpokládat např. i  $C_\infty$ ), funkční hodnoty má v  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\sum_{k=1}^{n_\sigma} \varrho_k(x) = 1$  pro každé  $x \in \Omega$  a  $\text{diam}(\text{supp } \varrho_k) < \sigma$ ,  $1 \leq k \leq n_\sigma$ . Zde pro obecnou funkci  $f$  definujeme její nosič  $\text{supp } f := \{x; f(x) \neq 0\}$  a pro obecnou množinu  $M \subset \mathbb{R}^n$   $\text{diam } M = \sup_{x,y \in M} |x-y|$ . Funkce  $\Lambda$  je předpokládána hladká, totéž se předpokládá o  $\beta$ , na niž budou dále kladeny další požadavky.

Důkaz regularity omezíme na okolí hranice, neboť regularitu uvnitř oblasti lze dokazovat touž technikou aniž je třeba narovnávat hranici a rozlišovat tečné a normálové směry. Ohřev  $T$  nechť má  $T(0) = 0$ , dodefinujeme jej pro  $t < 0$   $T(t) \equiv 0$ , pro  $t \in \langle \mathcal{T}, 2\mathcal{T} \rangle$   $T(t) = T(\mathcal{T})$ , pro  $t \in \langle 2\mathcal{T}, 3\mathcal{T} \rangle$   $T(t) = \omega(t)T(\mathcal{T})$ , kde  $\omega: \mathbb{R}^1 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je hladká funkce splňující  $\omega(2\mathcal{T}) = 1$ ,  $\omega(3\mathcal{T}) = 0 = \omega'(2\mathcal{T}) = \omega'(3\mathcal{T})$

a pro  $t \geq 3T$  nechť  $T(t) = 0$ . Lze předpokládat, že  $T$  závisí i na prostorových proměnných. Předpokládejme, že pro  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$  v prostorových proměnných má  $T$  "k-té derivace" integrovatelné v kvadrátu, v čase nechť má takto integrovatelnou " $\frac{1}{2}$ - $\varepsilon$ -tou derivaci". Navíc předpokládejme, že hladkost hranice není horší než hladkost  $T$  v prostorových proměnných tj., že je-li  $T \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k}(\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega)$  lze totéž říci o  $T_J$ , kde  $J$  je definováno dále.

Nechť libovolný  $x_0 \in \partial\Omega$ . Snadno ověříme nezávislost rovnice (1.1) na posunutí či otočení prostorové souřadné soustavy. Lze proto předpokládat, že  $x_0 = 0$  a navíc, že v jistém okolí  $U(0) \subset \mathbb{R}^3$  je  $\partial\Omega$  popsána funkcí  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  splňující  $\varphi(0) = 0$ ,  $\text{grad } \varphi(0) = 0$ , tj.  $x \equiv [x_1, x_2, x_3] \in U \cap \partial\Omega$  právě když  $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ . Navíc lze předpokládat, že  $U(0) \cap \Omega = U(0) \cap \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 > \varphi[x_1, x_2]\}$ . Protože  $\partial\Omega \in C_{k,1}$   $k \geq 1$ , ke každému zvolenému  $\varepsilon > 0$  najdeme  $\eta > 0$ , že je-li  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $|x| \leq 4\eta$ , pak  $|\text{grad } \varphi(x)| < \varepsilon$ . Lze předpokládat  $B_{4\eta, 2r} \subset U(0)$  pro vhodné  $r > 2\eta$ , kde pro  $a, b \in \langle 0, +\infty \rangle$  definujeme  $B_{a,b} = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a, x_3 \in \langle 0, b \rangle\}$ . Velikost  $\eta$  přitom zjevně nezávisí na původní volbě  $x_0 \in \partial\Omega$ , jež bylo posunuto do nuly, tj. infimum takových voleb  $\eta_x$  pro  $x \in \partial\Omega$  lze předpokládat kladné. Jemnost dělení jednotky zvolíme  $\delta = \eta$ . Zvolme  $\rho_k \in \mathcal{R}_\delta$  takové, že  $\rho_k(0) \neq 0$ .

Lokální narovnávání hranice v okolí 0 se provede transformací  $\Psi: [x_1, x_2, x_3] \rightarrow [x_1, x_2, x_3 - \varphi(x_1, x_2)]$ . Rovnice (1.1) má variační formulaci

$$(1.42) \quad \left\langle \left( \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) \right\rangle_t + \left\langle \text{grad } u, \text{grad } v \right\rangle_t = \\ = \left\langle q(\tau), v \right\rangle_t - \left\langle q(\Lambda u), v \right\rangle_t, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

kde  $((\cdot, \cdot))_t$  značí skalární součin v  $L_2((-\infty, t) \times \Omega)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  v  $L_2((-\infty, t) \times \partial\Omega)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Nechť  $v$  má nosič v  $(-\mathcal{T}, 3\mathcal{T}) \times \Psi^{-1}(B_{2r,r})$ . Zaveďme úmluvu, že funkci  $f \circ \Psi$  vzniklou transformací souřadnic budeme obecně značit opět  $f$ . Provedením transformace souřadnic  $\Psi$  přejde (1.42) v

$$(1.43) \quad \left( \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_t + (\text{grad } u, \text{grad } v)_t + \mathcal{B}^t(\text{grad } u, \text{grad } v) = \\ = \langle q(\tau), v \rangle_t - \langle q(\Lambda u), v \rangle_t, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

kde  $(\cdot, \cdot)_t$  je skalární součin v  $L_2((-\infty, t) \times \mathbb{R}^2 \times (0, r))$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  v  $L_2((-\infty, t) \times \mathbb{R}^2)$ . Protože koeficienty symetrické bilineární formy  $\mathcal{B}^t$  vhodně závisí jen na  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , snadno ověříme, že pro  $v, w$  s nosičem  $(-\mathcal{T}, 3\mathcal{T}) \times B_{2r,r}$  platí s dostatečně malým  $\epsilon_0$

$$(1.44) \quad |\mathcal{B}^t(\text{grad } v, \text{grad } w)| \leq k \epsilon_0 [(\text{grad } v, \text{grad } v)_t + (\text{grad } w, \text{grad } w)_t],$$

k nezávisí na  $v, w$ .

Protože  $\partial\Omega \in C_{1,1}$  jsou derivace koeficientů  $\mathcal{B}^t$  omezené.

Funkce  $J$  je definována

$$(1.45) \quad J: [x_1, x_2] \longmapsto \left[ 1 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x_1, x_2) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Známostou technikou mollifierů [9] lze k zadanému režimu ohřevu  $T$  zkonstruovat režimy  $T_n \rightarrow T$  v  $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, k}(\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega)$ ,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $k > 0$  libovolné, že každý z  $T_n$  je nezáporný, má nezápornou derivaci na  $(-\infty, 2\tau) \times \partial\Omega$ , nosič v  $(-\tau, 3\tau) \times \partial\Omega$ , je i v čase dostatečně hladký a shora omezený konstantou  $\max \{T(\tau, x); x \in \partial\Omega\}$  na celém  $\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega$ . Jako obvykle důkaz regularity budeme provádět vždy nejprve pro hladká  $T$  a pak přejdeme k limitě.

Nejprve dokážeme regularitu v tečném směru. Pro  $v$  s nosičem v  $(-\tau, 3\tau) \times \mathcal{B}_{\eta, r}$  provedeme v (1.43) posun o  $h$ ,  $|h| < \eta$ ,  $h$  má tečný směr, v argumentu všech členů. Označíme-li obecně  $f_{-h} = f(x+h)$ , dostaneme

$$(1.43)_{-h} \quad \left( \beta(u_{-h}) \frac{\partial u_{-h}}{\partial t}, v_{-h} \right) + \left( \text{grad } u_{-h}, \text{grad } v_{-h} \right)_t + B_{-h}^t(\text{grad } u_{-h}, \text{grad } v_{-h}) = \\ = \left\langle g(T_{-h}), v_{-h} J_{-h} \right\rangle_t + \left\langle g(\Lambda u_{-h}), v_{-h} J_{-h} \right\rangle_t.$$

Do (1.43) dosadíme  $v = \rho_k^2(u_{-h} - u)$  se zvoleným  $\rho_k \in \mathcal{R}_\eta$ , do (1.43)  $v_{-h} = \rho_k^2(u_{-h} - u)$  a provedeme rozdíl (1.43) $_{-h} - (1.43)$ .

Pro jednoduchost budeme dále psát  $\rho$  místo  $\rho_k$ . Úpravami dostaneme

$$(F_1) \quad \left( \text{grad}(\Delta_1^h u), \text{grad}(\rho^2 \Delta_1^h u) \right)_t = \left( \text{grad}(\rho \Delta_1^h u), \text{grad}(\rho \Delta_1^h u) \right)_t - \\ - \left( \Delta_1^h u, |\text{grad } \rho|^2 \Delta_1^h u \right)_t,$$

$$(f_2) \quad (\text{grad}(\varrho \Delta_1^h u), \text{grad}(\varrho \Delta_1^h u))_t = (\text{grad}(\Delta_1^h(\varrho u)), \text{grad}(\Delta_1^h(\varrho u)))_t + \\ + (\text{grad}(u_{-h} \Delta_1^h \varrho), \text{grad}(u_{-h} \Delta_1^h \varrho))_t - 2(\text{grad}(u_{-h} \Delta_1^h \varrho), \text{grad}(\Delta_1^h(\varrho u)))_t.$$

"Poruchový" člen vzniklý transformací souřadnic rozepíšeme

$$(g_1) \quad \mathcal{B}_{-h}^t(\text{grad} u_{-h}, \text{grad}(\varrho^2(u_{-h} - u))) - \mathcal{B}^t(\text{grad} u, \text{grad}(\varrho^2(u_{-h} - u))) = \\ = (\mathcal{B}_{-h}^t - \mathcal{B}^t)(\text{grad} u_{-h}, \text{grad}(\varrho(\varrho - \varrho_{-h})u_{-h})) + (\mathcal{B}_{-h}^t - \mathcal{B}^t)(\text{grad} u_{-h}, \text{grad}(\varrho(\varrho u)_{-h} - \varrho u)) + \\ + \mathcal{B}^t(\text{grad}(\Delta_1^h u), \text{grad}(\varrho^2 \Delta_1^h u)).$$

Vzhledem k symetrii formy  $\mathcal{B}^t$  můžeme poslední výraz  $(g_1)$  rozepsat ve dvou krocích stejně jako  $(f_1)$ ,  $(f_2)$ . Dále

$$(h) \quad \langle \varrho^2 [g(\Lambda u_{-h}) J_{-h} - g(\Lambda u) J], u_{-h} - u \rangle_t = \langle J \varrho^2 (g(\Lambda u_{-h}) - g(\Lambda u)), u_{-h} - u \rangle_t + \\ + \langle (J_{-h} - J) \varrho g(\Lambda u_{-h}), (\varrho - \varrho_{-h}) u_{-h} \rangle_t + \langle (J_{-h} - J) \varrho g(\Lambda u_{-h}), (\varrho u)_{-h} - \varrho u \rangle_t$$

a vzhledem k monotónii funkcí  $\varrho$  i  $\Lambda$  a nezápornosti  $J$  je první člen pravé strany  $(h)$  nezáporný. Dále

$$(i) \quad \langle \varrho^2 [g(\tau) J_{-h} - g(\tau) J], u_{-h} - u \rangle_t = \langle (\varrho - \varrho_{-h})^2 g(\tau) J_{-h}, u_{-h} - u \rangle_t + \\ + \langle (\varrho - \varrho_{-h}) g(\tau) J_{-h}, (\varrho u)_{-h} - \varrho u \rangle_t + \langle \Delta_1^h(\varrho g(\tau) J), (\varrho - \varrho_{-h}) u \rangle_t + \\ + \langle \Delta_1^h(\varrho g(\tau) J), \Delta_1^h(\varrho u) \rangle_t.$$



S odhadováním členu  $(\rho^2(\beta(u_{-h}) \frac{\partial u_{-h}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \beta(u)), u_{-h} - u)_t$  jsou největší obtíže. Jedním z jeho možných rozpisů je

$$(j_1) \quad \left( \rho^2 \left[ \beta(u_{-h}) \frac{\partial u_{-h}}{\partial t} - \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right], u_{-h} - u \right)_t = \left( \frac{\partial u_{-h}}{\partial t} \rho^2 (\beta(u_{-h}) - \beta(u)), u_{-h} - u \right)_t + \\ + \left( \beta(u) \rho^2, \frac{\partial}{\partial t} ((\Delta_1^h u)^2) \right)_t = \left( \frac{\partial (u_{-h} - u)}{\partial t} \rho^2 (\beta(u_{-h}) - \beta(u)), (u_{-h} - u) \right)_t + \\ + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \rho^2 (\beta(u_{-h}) - \beta(u)), u_{-h} - u \right)_t + \left( \beta(u), \frac{\partial}{\partial t} ((\rho \Delta_1^h u)^2) \right)_t$$

Předpokládejme, že  $\beta(u)$  má speciální tvar

$$(1.46) \quad \beta : u \longrightarrow k_0 u + k_1, \quad k_1 > 0 \quad \text{a} \quad k_0 \in \left\langle 0, \frac{3k_1}{4 \max_T(\sigma_i)} \right\rangle$$

Pak  $k_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \beta(u)}{\partial t}$ ,  $\beta(u_{-h}) - \beta(u) = k_0 (u_{-h} - u)$ , a tedy

$$(j_2) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \rho^2 (\beta(u_{-h}) - \beta(u)), u_{-h} - u \right)_t + \left( \beta(u), \frac{\partial}{\partial t} ((\rho \Delta_1^h u)^2) \right)_t = \\ = \left( \frac{\partial}{\partial t} (\beta(u) \rho^2 (\Delta_1^h u)^2), 1 \right)_t = \int_{\Omega} \beta(u) (\rho^2 \Delta_1^h (u)) (t) dx.$$

Dále

$$(j_3) \quad \int_{\Omega} \beta(u) \rho^2 (\Delta_1^h u)^2 (t) dx = \int_{\Omega} \beta(u) (\Delta_1^h (\rho u))^2 dx + \\ + 2 \int_{\Omega} \beta(u) u_{-h} (\rho - \rho_{-h}) \Delta_1^h (\rho u) + \int_{\Omega} (\Delta_1^h \rho)^2 \beta(u) u_{-h}^2 dx.$$

$$(j_4) \quad \left| \left( \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_1^h u) \right) \rho^2(\beta(u) - \beta(u))_t, \Delta_1^h u \right| - \left| \left( \frac{k_0}{3}, \frac{\partial}{\partial t} ((\rho^2 \Delta_1^h u)^3) \right)_t \right| \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{2k_0}{3} \max_{\partial\Omega} T(\gamma, \cdot) \rho^2(\Delta_1^h(u))^2(t) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\beta(u) \rho^2(\Delta_1^h(u)))^2(t) dx$$

užitím věty o srovnání [6], [14] zaručující  $u \in \langle 0, \max_{\partial\Omega} T(\gamma, \cdot) \rangle$  na  $\mathbb{R}^1 \times \Omega$  a předpokladu o  $k_0$ . Poslední integrál v  $(j_4)$  rozepíšeme analogicky  $(j_3)$ . Výsledky (f) až (j) dosadíme nyní do (1.43)<sub>-h</sub>-(1.43). Členy typu  $\rho_{-h} - \rho$ ,  $J_{-h} - J$ ,  $B_{-h}^t - B^t$  atd. lze pro  $|h| \leq \eta$  odhadnout  $e|h|$  pro  $e = \max_{x \in B_{2\eta, r}} (|\text{grad } \rho_k|, |\text{grad } \varphi|)$ . Po sloučení členů z  $(j_3)$  a  $(j_4)$  na levé straně vzniklé nerovnosti bude  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta(u) (\Delta_1^h \rho u)^2(t) dx$ , na pravé straně zůstanou jen členy typu druhého a třetího integrálu  $(j_3)$ .

S přechodem  $t \rightarrow +\infty$  přejdeme u členů typu  $\int_{\Omega} |f(x, t)| dx$  k  $\sup_{t \in \mathbb{R}^1} \int_{\Omega} |f(x, t)| dx$ .

Upravenou nerovnost vynásobíme  $|h|^{-2-2\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  a provedeme integraci  $\int \cdot dh$ . Dále při odhadech využijeme konečnosti integrálů

$$\int_{|h| \geq \eta} |h|^{-2-2\alpha} dh \quad \text{a} \quad \int_{|h| \leq \eta} |h|^{-2\alpha} dh \quad \text{a faktu, že}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2 \times \langle 0, r \rangle} \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-4+2\theta} (\Delta_1^h w)^2 dh dx dt \leq \text{konst } \|w\|_{0,1,1,0, \mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle}$$

platného pro každé  $\theta \in (0, 1)$  vzhledem k (1.6) a (1.7). Využijeme též známé a již zmiňované základní energetické nerovnosti pro řešení  $u$

$$(1.47) \quad \mathcal{E}(u) \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \int_{\Omega} u^2(t) dx + \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx dt \leq \text{konst } \|T\|_{L_2(\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega)}$$

jež je důsledkem dosazení  $v = \mathcal{D}(u)$  do (1.43), kde  $\mathcal{D}$  je primitivní funkce k  $\beta$ , invertibility  $\mathcal{D}$ , jež je monotónní, a úvah např. z [6], [14]. Dle věty o stopách [8] (srov. též [3])  $\mathcal{E}(u)$  z (1.47) majorizuje  $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega)}$ . Aplikací nerovnosti  $|a_0 b_0| < \frac{a_0^2}{4\varepsilon_0} + \varepsilon_0 b_0^2$  platné pro libovolná  $a_0 \in \mathbb{R}^1, b_0 \in \mathbb{R}^1, \varepsilon_0 > 0$ , substitucí  $U = \rho u$ ,  $F = \rho g(\tau)U$  a odečtením členů typu  $\int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \mathcal{E}(\Delta_1^h U) dh$  z pravé strany upravené nerovnosti takto odvozené z (1.43), jež se na této pravé straně vždy vyskytují jen v součinu s malým  $\varepsilon_0$  dostaneme konečně

$$(1.48) \quad \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \mathcal{E}(\Delta_1^h U) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle} (\Delta_1^h U(t, x))^2 dx dh + \\ + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle} |h|^{-2-2\alpha} |\text{grad } \Delta_1^h U|^2 dx dt dh \leq \tilde{K} + \mathcal{K} \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \langle F - F U - U \rangle_{-h} \infty.$$

Konstanty  $\mathcal{K}, \tilde{K}$  závisí (spojitě) na  $\|T\|_{0,1,\mathbb{R}^1 \times \partial\Omega}, \|\varphi\|_{C_{1,1}}, \|\rho\|_{C_{1,1}}, \|g\|_{C_{0,1}}, \|\wedge\|_{C_{0,1}}$ . Nyní z Hölderovy nerovnosti

$$(1.49) \quad \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \langle F - F U - U \rangle_{-h} \infty \leq \frac{\mathcal{K}}{4\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} |h|^{-2-2\alpha} (F - F)^2 dh dx dt + \\ + \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} |h|^{-2-2\alpha} (U - U)(t, x_1, x_2, 0) dh dx dt.$$

S použitím (1.6), (1.7) a definice  $F$  odhadneme první sčítanec pravé strany (1.49) výrazem konst  $(\|\rho\|_{1,1,1,\mathbb{R}^3}^2 + \|T\|_{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, \mathbb{R}^1 \times \partial\Omega}^2)$ ,  $k \geq 1$ . U rozšíříme nyní z  $\mathbb{R}^3$  pomocí úlohy (1.36) při transformaci souřadnic  $x'_3 = r - x_3$ , tedy zkonstruujeme  $w$ , jež řeší (1.36) pro  $T = U(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$ . Odsud, z (1.7), (1.40), z faktu, že  $\tilde{w}$  řeší (1.36) pro  $\hat{T} = \hat{U}$  ( $\hat{U}$  je Fourierův obraz  $U(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$ ) právě když  $\tilde{w} |\xi|^{2\alpha}$

řeší (1.36) pro  $\hat{T} = \hat{U} |\xi|^{2\alpha}$  a ze skutečnosti, že  $w$  řeší (1.36) právě když funkcionál  $w \mapsto \mathcal{E}(w)$  nabývá v  $w$  svého minima, platí

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{U}(\tau, \xi)| |\xi|^{2\alpha} d\xi dt &= \frac{1}{c_{2,1}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} |h|^{-2-2\alpha} (U_{-h} - U)(t, x_1, x_2, 0) dh dx dt \leq \\
 (1.50) \quad &\leq K_1 + K_2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle} \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} |\text{grad}_{\Delta_1^h} w|^2 dx dt dh \leq K_1 + K_2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\Delta_1^h(w)) |h|^{-2-2\alpha} dh \leq \\
 &\leq K_1 + K_2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\Delta_1^h U) |h|^{-2-2\alpha} dh,
 \end{aligned}$$

kde  $\mathcal{E}$  je definována v (1.47). Konstanta  $K_1$  závisí jen na vnějších parametrech úlohy (analogicky  $\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}}$ ),  $K_2$  jen na  $\alpha$ . Díky koeficientu  $\varepsilon_0$  v (1.49) konečně odvodíme nezávisle na volbě  $\rho \in \mathcal{R}_{n_\gamma}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \mathcal{E}(\Delta_1^h U) dh &\equiv \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle} (U - U_{-h})^2(x, t) dx dh + \\
 (1.51) \quad &+ \int_{\mathbb{R}^2} |h|^{-2-2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3 \times \langle 0, r \rangle} |\text{grad}_{-h} (U - U_{-h})|^2 dx dt dh \leq K (\|T\|_{0,1, \mathbb{R}^1 \times \Omega}, \|\varphi\|_{C_{1,1}}, \\
 &\max_{1 \leq k \leq n_\gamma} \|\rho_k\|_{C_{1,1}}, \|g\|_{C_{0,1}(0, \max_{\partial\Omega} T(\mathcal{J}, \cdot))}, \|\Lambda\|_{C_{0,1}(0, \max_{\partial\Omega} T(\mathcal{J}, \cdot))}).
 \end{aligned}$$

Díky spojitě závislosti řešení (1.1) na režimu ohřevu [14] lze provést limitní přechod k neregulárnímu  $T$ . (1.51) dává omezenost  $\{U_n\}$  v  $H^{0,2-\varepsilon, 2-\varepsilon, 1}(\mathbb{R}^3 \times (0, r))$  pro  $U_n$  odpovídající regulárním  $T_n$  a tedy slabou konvergenci  $U_n$  v tomto prostoru. Tedy i limitní  $U$  odpovídající limitnímu  $T$  je v tomto prostoru, a tedy " $2-\varepsilon$  násobná derivovatelnost" (ve smyslu (1.8)) řešení  $u$  úlohy (1.1) v tečných prostorových proměnných pro neregulární  $T$  je dokázána.

Regularitu v čase budeme dokazovat obdobným postupem. Posuny v čase budeme značit  $\mathcal{L}$ . Od úlohy (1.1) přejdeme nejprve k

$$(1.52) \quad \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u \quad \text{na } \mathbb{R}^1 \times \Omega, \quad u(-\infty, x) = 0 \text{ na } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(T) - g(\lambda u) \text{ na } \mathbb{R}^1 \times \partial\Omega, \quad T \text{ rozšířeno na } \mathbb{R}^1 \times \partial\Omega$$

jako výše (speciálně  $T \equiv 0$  na  $(-\infty, 0)$ )

Posunem o  $\lambda$  ve všech argumentech (1.52) přejdeme k (1.52)<sub>-λ</sub> a pro (1.52)<sub>-λ</sub> - (1.52) provedeme variační formulaci. Vezmeme nyní  $x_0 \in \partial\Omega$  a  $\rho \in \mathcal{A}_\eta$ , že  $\rho(x_0) \neq 0$  a v okolí  $x_0$  provedeme narovnávaní hranice jako v předchozím případě (toto narovnávaní nezávisí na čase!). Výpočty (f) až (j) lze použít (zjednoduší se o to, že  $\rho = \rho_{-\lambda}$ ,  $B = B_{-\lambda}$ ,  $J = J_{-\lambda}$ ) při dosazení  $v = \rho^2(u_{-\lambda} - u)$  do variační formulace lokálně narovnané (1.52)<sub>-λ</sub> - (1.52).

V dalším postupu oproti předchozímu změním jen tolik, že vzniklou nerovnici násobíme  $|\lambda|^{-1-2\alpha}$  místo  $|\lambda|^{-2-2\alpha}$  a integrujeme  $\int_{\mathbb{R}^1} \cdot dt$ . Opakováním všech ostatních kroků dojdeme až k nerovnosti typu (1.48), kde  $\int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{-2-2\alpha} \cdot dh$  nahradí  $\int_{\mathbb{R}^1} |\lambda|^{-1-2\alpha} \cdot d\lambda$  (tečka značí dosazení funkce) a  $\Delta_1^h$  nahradí  $\Delta_1^\lambda$ . Máme tedy odhadnout

$$(1.53) \quad \int_{\mathbb{R}^1} |\lambda|^{-1-2\alpha} \langle F_{-\lambda} - F_{\lambda} U_{-\lambda} - U_{-\lambda} \rangle_\infty d\lambda \leq \frac{(c_{41\alpha})^2}{4\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{F}|^2 |\tau_0|^{1-2\varepsilon} d\tau_0 d\xi +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\tau_0|^{4\alpha+2\varepsilon-1} |\hat{U}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, 0)|^2 d\tau_0 d\xi,$$

kde  $\varepsilon_0 > 0$  je libovolné,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ . Díky (1.7) i předpokladům na  $\rho$  a  $\psi$  lze první člen pravé strany (1.53) odhadnout konst. ·

$\|T\|_{\frac{1}{2}-\varepsilon, k, \partial\Omega}$ , konstanta závisí jen na vnějších parametrech úlohy, nikoli na  $u$ . Narozdíl od (1.50), kde byla díky dostatečné regularitě  $T$  v tečných prostorových proměnných rezerva, užije-

me nyní (1.40) přesně. Druhý integrál na pravé straně (1.53) lze odhadnout pro  $w$  řešící (1.36) s okrajovou podmínkou  $U$  (záměna hranic je též jako u regularizace v tečných prostorových proměnných)

$$(1.54) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\tau_0|^{4\alpha+2\varepsilon-1} |\hat{U}(\tau_0, \xi_1, \xi_2, 0)|^2 d\tau_0 d\xi \leq K'_2 \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} |w|^{1/2-4\alpha-2\varepsilon} |\text{grad}(w_{-L}-w)|^2 dx dt dL + K'_1 \leq$$

$$\leq K'_1 + K'_2 \int_{\mathbb{R}^1} |L|^{1/2-4\alpha-2\varepsilon} \mathcal{E}(\Delta_1^L w) dL \leq K'_1 + K'_2 \int_{\mathbb{R}^1} |L|^{1/2-4\alpha-2\varepsilon} \mathcal{E}(\Delta_1^L U) dL,$$

přičemž o  $K'_1, K'_2$  platí totéž co (po řadě) pro  $K_1, K_2$ . Je nyní třeba zaručit, že  $-\frac{1}{2} + 4\alpha + 2\varepsilon = 1 + 2\alpha$ , což platí právě když  $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}$ . Regularizace v čase je tedy omezena na  $\alpha < \frac{3}{4}$ . Závěr postupu je již stejný jako v předchozím případě. Protože uvnitř oblasti  $\Omega$  je postup stejný, dokázali jsme

$$(1.55) \quad \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\Omega} |L|^{-5/2+2\varepsilon} |\text{grad} \Delta_1^L u|^2 dx dt dL + \int_{\mathbb{R}^1} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |L|^{-5/2+2\varepsilon} \int_{\Omega} (\Delta_1^L u)^2(t, x) dx dL < +\infty.$$

Poznamenejme, že proces narovnávání hranice je pro časovou proměnnou potřebný jen kvůli přímé možnosti využití ekvivalence (1.40). Z (1.51) a (1.55) nyní zřejmě  $\varrho u \in C_0(\mathbb{R}^1; H^{4/3-\varepsilon_2, 4/3-\varepsilon_2})^1(\mathbb{R}^2 \times (0, \tau))$ , neboť existují konstanty  $c_1, c_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,  $\varepsilon_2$  libovolně malé pro libovolně malé  $\varepsilon$ , že

$$(1.56) \quad \tau_0^{1/2+\varepsilon_1} \xi^{4/3-\varepsilon_2} \leq c_1 \tau_0^{3/4-\varepsilon} \xi + c_2 \xi^{2-\varepsilon}.$$

Předpokládejme nyní v Lamého systému  $\beta(u) = \text{konst} \cdot u$ , tedy linearitu, a konstantu označme  $\check{C}$ . Lze jej tedy přepsat do

tvaru ( $\mathcal{C} = \check{e} \frac{E}{1-2\sigma}$ )

$$(1.57) \quad a(v, w) = \mathcal{C}(u, \operatorname{div} w)_\Omega, \quad t \in \mathbb{R}^1$$

kde  $a(v, w) \equiv \int_\Omega a((\varepsilon(v), \varepsilon(w))) dx$ ,  $\varepsilon(\cdot)$  jsou tenzory malé deformace,  $a$  forma representovaná maticí koeficientů Hookova zákona  $a(\cdot, \cdot)_\Omega$  skalární součin v  $L_2(\Omega)$ . Tento tvar je ekvivalentní (1.33). Provedením lokálního narovnávaní hranice pro  $w$  s nosičem v  $\Psi^{-1}(B_{3\eta, 2r})$  dostaneme

$$(1.58) \quad a(v, w) + b(v, w) = \mathcal{C}(u, \operatorname{div} w + \ell w)_B,$$

kde  $B \equiv B_{3\eta, 2r}$ ,  $(\cdot, \cdot)_B$  skalární součin v  $L_2(B)$ , přičemž symetrická bilineární forma  $b$  splňuje  $b(v, w) \leq 2\varepsilon \sum_{i=1}^3 [(\operatorname{grad} v_i, \operatorname{grad} v_i)_B + (\operatorname{grad} w_i, \operatorname{grad} w_i)_B]$  a  $\ell$  je malá lineární porucha  $\ell: w \mapsto -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ . Dosazením  $w = \varrho^2 (v_{-h} - v)$  do (1.58)<sub>-h</sub> - (1.58) a provedením úprav analogických úpravám rovnice vedení tepla při důkazu regularity  $u$  podél hranice, užitím Kornovy nerovnosti pro  $a(\Delta_1^h(\varrho v), \Delta_1^h(\varrho v))$ , vynásobením vzniklé nerovnosti  $|h|^{-2-2\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , integrací a obdobným postupem jako v rovnici vedení tepla dostaneme díky příslušné regularitě  $\varrho u$ , že všechny derivace  $\frac{\partial \varrho v_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  jsou v  $\bigcap_{\varepsilon > 0} H^{1-\varepsilon, 1-\varepsilon, 0}(\mathbb{R}^2 \times (0, 2r))$ . Tento výsledek ovšem platí pro každé  $\varrho \in \mathcal{R}_\eta$ , že  $\operatorname{supp} \varrho \cap \Omega \subset \Psi^{-1}(B)$ , tedy i  $\frac{\partial \varrho v_i}{\partial x_j} \in \bigcap_{\varepsilon=0} H^{1-\varepsilon, 1-\varepsilon, 0}(B_{2\eta, r})$ , neboť na  $B_{2\eta, r}$  lze najít číslo  $\check{s} > 0$ , že  $\sum_{1 \leq k \leq n \check{d}} \varrho_k \circ \Psi > \check{s}$ .  
 $\Omega \cap \operatorname{supp} \varrho_k \subset \Psi^{-1}(B)$

K dalšímu dokazování regularity  $v$  (dosud jsme neověřili ani existenci 2. derivací) využijeme nyní diferencí 2. stupně. Do (1.58)<sub>-h</sub> + (1.58)<sub>h</sub> - 2 · (1.58) dosadíme  $w = \varrho^2 \Delta_2^h v$  pro tečný



směr  $h$ . Nejprve spočteme, že  $a(\Delta_2^h, \rho^2 \Delta_2^h v) = a(\rho \Delta_2^h v, \rho \Delta_2^h v) - \int_{B_{2\eta, r}} a_{ijkl} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Delta_2^h v_j + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \Delta_2^h v_i \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \Delta_2^h v_l + \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \Delta_2^h v_k \right)$  a dále použijeme

$$(1.59) \quad \rho \Delta_2^h = \Delta_2^h(\rho f) + (\rho - \rho_h)(f_h - f) + (\rho - \rho_h)(f_h - f) - f \Delta_2^h \rho.$$

Obdobnou úpravou pravé strany (1.58)<sub>h</sub> + (1.58)<sub>-h</sub> = 2°(1.58), využitím výsledků 1. regularizačního kroku a faktu, že  $\rho \in H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, \frac{4}{3}-\varepsilon, 1}(\mathbb{R}^2 \times (0, r))$  dostaneme postupem obdobným postupu pro 1. difference s využitím Kornovy nerovnosti pro  $a(\Delta_2^h(\rho v), \Delta_2^h(\rho v))$ , vynásobením nerovnosti  $|h|^{-4-2\alpha}$ ,  $\alpha < \frac{1}{3}$  a integrací, že  $\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} \in H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, \frac{4}{3}-\varepsilon, 0}(\mathbb{R}^2 \times (0, r))$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , pokud  $\rho \in C^{2,1}$  a  $\varphi \in C^{2,1}$  (pro malá  $h$  je pak ovšem  $\Delta_2^h \rho \leq ch|f|$ ,  $\Delta_2^h \varphi \leq ch|f|^2$ ). Odsud  $\tau_{ij} \in H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, \frac{4}{3}-\varepsilon, 1}(B_{\eta, \frac{r}{2}})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Díky platnosti původních Lamého rovnic  $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dokážeme, že  $\frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} \in L_2(B_{\eta, \frac{r}{2}})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a proto všechna  $\tau_{ij}$  jsou v  $H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, \frac{4}{3}-\varepsilon, 1}(B_{\eta, \frac{r}{2}})$ . Pro  $n = 2$  věta 2 implikuje, že  $\tau_{ij} \in C_0(B_{\eta, \frac{r}{2}})$  a jelikož vzory  $B_{\eta, \frac{r}{2}}$  pro systém map  $\Psi$  pokrývají celou  $\partial \Omega$  a regularitu lze obdobně dokázat s použitím  $\rho \in \mathcal{R}_\eta$  takových, že  $\text{supp } \rho \subset \Omega$ , dokázali jsme, že  $\tau \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^4)_{t \in \mathbb{R}^1}$  a vzhledem k časové spojitosti  $u(t, \cdot, \cdot)$  v normě v  $H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, 1}(\Omega)$  je  $\tau \in C_0(Q; \mathbb{R}^4)$ .

Lepší výsledek - spojitost i ve 3 dimenzích - vyžaduje lepší výsledek regularity  $u$  v tečných prostorových proměnných s využitím vyšších diferencí. Z úvah (1.56) vidíme, že dosud používaná technika zaručuje při zlepšení chování  $u$  v tečném směru o 1 derivaci přechod  $u$  od normy  $C_0(\mathbb{R}^1, H^{\alpha, \alpha, 1}(\mathbb{R}^2 \times (0, r)))$  k normě  $s\alpha + \frac{1}{3}$  a tedy pro výsledek  $\alpha > 2$  budeme potřebovat 4. difference a  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, 4}(\mathbb{R}^1 \times \partial \Omega)$ , tj.  $T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{1}{2}-\varepsilon, 4}((0, \sigma) \times \partial \Omega)$



před rozšiřováním  $\Gamma$ . Použití vyšších diferencí však je možno pokládat za zvládnuté a potřebné výsledky lze ověřit u lineárních systémů, při nelineárních naráží na technické obtíže.

O těchto obtížích se zmíníme na příkladě nelineárního systému (1.2), kde se zdají být nejmenší, tj. předpokládejme, že  $\gamma$  není lineární. Užití 1. difference nečiní problémy - je-li  $\check{c}_0 = \sup_{z \in \langle 0, \max_{\partial \Omega} \gamma \rangle} \gamma'(z) < +\infty$ , lze členy typu  $\gamma(u_{-h}) - \gamma(u)$  odhadnout  $\check{c}_0 |u_{-h} - u|$  a důkaz 1. regularizačního kroku projde.

Předpokládejme nyní pro jednoduchost, že  $\Omega$  je pás typu  $\mathbb{R}^1 \times (0, r)$  a lze se tak vyhnout nutnosti užívat "lokalizační funkce  $\varrho$ ". K důkazu regularity je třeba odhadnout pro vhodné  $\nu > 0$  (to pro spojitost  $t$  zjevně stačí) výraz

$$(1.60) \quad \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} (\gamma(u_{-h}) + \gamma(u_h) - 2\gamma(u))^2 |h|^{-1-2-2\nu} dx dh \equiv I_0,$$

přitom víme, že  $u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_0(\mathbb{R}^1, H^{\frac{4}{3}-\varepsilon, 1}(\mathbb{R}^1 \times (0, r)))$ . Užitím (1.7), (1.10) víme, že  $I_0$  z (1.60) lze vyjádřit

$$(1.61) \quad I_0 = \frac{c_{1,2}(\nu)}{c_{1,1}(\nu)} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} \left( \frac{\partial \gamma(u_{-h})}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma(u)}{\partial x_1} \right)^2 |h|^{-1-2\nu} dx dh.$$

Protože  $\frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma(u_{-h}) - \gamma(u)) = \gamma'(u) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{-h} - u) + \frac{\partial u_{-h}}{\partial x_1} (\gamma'(u_{-h}) - \gamma'(u))$ , platí

$$(1.62) \quad I_0 \leq 2 \frac{c_{1,2}(\nu)}{c_{1,1}(\nu)} \left[ \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} (\gamma'(u))^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_1^h u \right)^2 |h|^{-1-2\nu} dx dh + \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} \left( \frac{\partial u_{-h}}{\partial x_1} (\gamma'(u_{-h}) - \gamma'(u)) \right)^2 |h|^{-1-2\nu} dh dx \right]$$

Protože  $\gamma'(u)$  lze odhadnout  $\check{c}_0$ , viz výše, je první sčítanec v (1.62) konečný pro  $\nu < \frac{1}{3}$ . Za předpokladu omezenosti  $\gamma''$  na  $\langle 0, \max_{\partial \Omega} \gamma \rangle$  lze ve 2. sčítanci nahradit  $\gamma'(u_{-h}) - \gamma'(u)$  výrazem  $u_{-h} - u$ . Z věty o

vnoření pak lze ukázat, že  $u$  je  $\frac{1}{6} - \varepsilon$  hölderovská v proměnné  $x_1$ , pro  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$  libovolné. Díky faktu, že  $u \in C_0(\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle)$  je ovšem

$$\int_{|h| > \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} \left( \Delta_1^h u \frac{\partial u_{-h}}{\partial x_1} \right)^2 |h|^{-1-2\nu} dh dx < +\infty \text{ pro každé } \varepsilon > 0.$$

Nyní

$$(1.63) \quad \int_{|h| \leq \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} \left( \Delta_1^h u \frac{\partial u_{-h}}{\partial x_1} \right)^2 |h|^{-1-2\nu} dh dx < \\ \leq \int_{\varepsilon \geq |h|} \int_{\mathbb{R}^1 \times \langle 0, r \rangle} |h|^{1-\varepsilon(\nu)} \left( \frac{\partial u_{-h}}{\partial x_1} \right)^2 dh dx < +\infty,$$

s  $\varepsilon(\nu) > 0$  pokud  $\nu < \frac{1}{6}$ . Takto jsme pro  $n = 2$  dokázali regularitu i pro nelineární  $\gamma$ .

Výsledky této části lze shrnout :

Věta 3. Nechť režim ohřevu je na  $\langle 0, \mathcal{J} \rangle \times \partial\Omega$  monotónní v čase a omezený a nechť je dostatečně hladký v prostorových proměnných. Nechť v (1.1)  $\beta(u) = k_0 u + k_1$ , kde  $k_1 > 0$ ,  $k_0 \in \langle 0, \frac{3k_1}{4 \max_{\partial\Omega} \tau(\mathcal{J}, \cdot)} \rangle$  a nechť  $\dim \Omega = n = 2$ . Pak  $\tau \in C_0(Q; \mathbb{R}^{n^2})$ . Totéž platí pro  $n = 3$ , pokud rovnice (1.1) a (1.2) jsou lineární, tj.  $\beta(u) = \text{konst.}$ ,  $\gamma(u) = \text{konst.}$  a koeficient sálavosti  $\sigma_5 = 0$ .

Je samozřejmé, že dokázané výsledky regularity říkají více než jen o spojitosti  $\tau$ , na níž jsme se zde zaměřili. Přitom výsledky shrnuté ve větě 3 nelze považovat za definitivní. Další výzkum kvalitativních odhadů řešení pro singulární režimy ohřevu by se měl zaměřit na zlepšení výsledků věty 3 a na studium vlivu izolovaných nehladkostí hranice.

## II. Rychlý algoritmus pro syntézu multi-optimálního řízení pro systémy s monotónní odezvou

V této kapitole je navržen rychlý a velmi efektivní algoritmus syntetizující netradičním způsobem režim ohřevu velkých předlisků ve vozových ohřívacích pecích. Algoritmus vychází z myšlenky již dříve uplatňované při návrhu těchto ohřevů, totiž ohřívat předlisk tak, aby odezva termoelastických napětí byla po celou dobu ohřevu pokud možno co nejbližší maximálním přípustným napětím, a aby je ovšem nikde nepřevyšovala. Vychází se přitom z předpokladu, že zrychlení (resp. zpomalení) ohřevu způsobuje zvýšení (resp. pokles) vznikajících termoelastických napětí. Při praktických úlohách ohřevu lze takové (nebo alespoň velmi podobné) chování očekávat, ikdyž dokázat takový princip lze zatím jen pro jednorozměrné lineární úlohy (viz dále), a obecně takový princip asi neplatí. Přestože pro dále uvedený algoritmus zůstávají některé závažné otázky otevřeny, ukázal se tento algoritmus velice efektivní ve srovnání s klasickými přístupy optimálního řízení spolu s metodami matematického programování (viz [11]). Rozbor uvedený níže představuje pokus o určité vysvětlení efektivnosti algoritmu.

### II.1 Řízený systém a algoritmus řízení

Uvedeme nejprve jistou motivaci. Představme si, že jsme v automobilu, máme předepsanou maximální rychlost v

závislosti na čase, maximální možné zrychlení (dané silou motoru) a maximální možné zpomalení (dané třením mezi zabrzděnými koly a vozovkou). Cílem je ujet za daný čas co největší dráhu. Je zřejmé, že optimální řízení bude takové, že v každém okamžiku se bude snažit dosáhnout co největší rychlosti. Samozřejmě nemůžeme přihlížet jen k současné maximální rychlosti nebo k maximálnímu možnému zrychlení, ale je nutno myslet i na budoucí situace a včas brzdit s ohledem na maximální předepsanou rychlost v budoucnu.

Tato situace je určitou analogií ohřevu v peci. Uvedeme nyní abstraktní formulaci této situace (interpretaci podrobněji viz §2.3) Budeme přitom uvažovat situaci po časové semidiskretizaci, tedy systém nebude spojitý v čase, ale bude v  $n$  diskretních časových úrovních. Vektor řízení  $u=(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  bude představovat počáteční teplotu pece ( $u_1$ ) a nastavenou rychlost ohřevu mezi jednotlivými časovými úrovněmi ( $u_2, \dots, u_n$ ). Stavový operátor  $A:U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ , bude přiřazovat danému řízení  $u$  z množiny přípustných řízení  $U$  stav  $A(u)=(A(u)_1, \dots, A(u)_n)$ , jehož složka  $A(u)_i$  bude maximální termoelastické napětí vzniklé v  $i$ -té časové úrovni. Budeme předpokládat následující vlastnosti operátoru  $A$  (indexy  $i, j, k$  budou vždy z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ ):

(2.1)  $A$  je spojitý

(2.2)  $A$  je kauzální ve smyslu:

$$\forall i : A(u)_i = A(\bar{u})_i \text{ kdykoli } u, \bar{u} \in U \text{ a } \forall j \leq i : u_j = \bar{u}_j,$$

(2.3)  $A$  je monotónní ve smyslu:

$$\forall j \quad \forall i \geq j: A(u)_i > A(\bar{u})_i \quad \text{kdykoli } u, \bar{u} \in U, u_j > \bar{u}_j \\ \text{a } \forall k \neq j: u_k \geq \bar{u}_k.$$

Množina přípustných řízení  $U$  bude uvažována pouze s tzv. triviálními omezeními:

$$(2.4) \quad U = \{u \in \mathbb{R}^n; \forall i: b_i \leq u_i \leq B_i\},$$

kde  $b_1, B_1$  jsou předem dané meze:  $b_1$ , resp.  $B_1$  je minimální, resp. maximální přípustná teplota v peci na počátku ohřevu, a  $b_i$ , resp.  $B_i$  s  $i \geq 2$  je minimální, resp. maximální rychlost ohřevu pece. Dále budeme uvažovat stavové omezení:

$$(2.5) \quad \forall i: A(u)_i \leq C_i,$$

kde  $C_i$  představuje maximální přípustné redukované napětí.

Algoritmus, definovaný níže, pracuje následovně: postupně pro  $i=1,2,\dots,n$  určí v  $i$ -té časové úrovni co největší  $u_i$  s ohledem na to, aby byly splněny nerovnosti  $u_i \leq B_i$  a  $A(u)_i \leq C_i$ . Není-li to ale možné s ohledem na nerovnost  $u_i \geq b_i$ , vrátí se o jednu nebo případně více úrovní zpět a sníží již dříve stanovené složky řízení  $u_j$  s  $j=i-1, i-2, \dots$ , atd.

Algoritmus:

Krok 1:  $i:=1, j:=1$

Krok 2: je-li  $j < 1$ , pak "konec: neexistuje přípustné řízení"

Označme  $X:R \rightarrow R$  funkci  $u_j \mapsto A(u)_i$ , přitom hodnoty  $u_k$  s  $k \neq j$  jsou uvažovány pevné.

Krok 3: je-li  $X(B_j) \leq C_i$ , pak položíme  $u_j := B_j$  a provedme Krok 6.

Krok 4: je-li  $X(b_j) > C_i$ , pak položíme  $u_j := b_j$ ,  $j:=j-1$ , a provedme Krok 2.

Krok 5: položíme  $u_j := x$ , kde  $x$  řeší rovnici  $X(x) = C_i$ .

Krok 6: je-li  $i=n$ , pak "konec: nalezeno řízení"

Krok 7: položíme  $j:=i+1, i:=i+1$ , a provedme Krok 2.

Všimněme si, že řešitelnost rovnic  $X(x) = C_i$  v kroku 5 je zaručena předpoklady (2.1) a (2.3), které implikují to, že funkce  $X$  je spojitá a rostoucí, a dále kroky 3 a 4, které kroku 5 nutně předcházejí a které zaručí to, že  $X(b_j) \leq C_i$  a  $X(B_j) > C_i$ . Pak zřejmě rovnice  $X(x) = C_i$  má právě jedno řešení  $x \in [b_j, B_j[$ . Je-li systém navíc lineární, lze tuto rovnici řešit přesně, obecně však pouze iteračně - samozřejmě s použitím hodnot  $X$  v bodech  $b_j$  a  $B_j$  pro sestavení "dobré" nulté iterace.

Výsledné řízení má tu vlastnost, že zvětšením kterékoli jeho komponenty dojde k porušení některého omezení (platí-li ovšem předpoklady (2.2) a (2.3)). To je také základní filozofie, ze které se při návrhu algoritmu vycházelo.

## II.2 Vlastnosti algoritmu, multi-optimalita setrojeného řízení

Začneme s několika standardními definicemi. Systém  $A$  s omezeními (2.4) a (2.5) nazveme říditelným, je-li množina  $U_0 = \{u \in U; \forall i: A(u)_i \leq C_i\}$  neprázdná. Mějme systém funkcí  $\{J_k\}_{k \in I}$ ,  $J_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  je indexová množina. Řízení  $u^* \in U_0$  nazveme Pareto-optimálním vzhledem k systému kritérií  $\{J_k\}_{k \in I}$ , jestliže  $\forall u \in U_0, u \neq u^*, \exists k \in I: J_k(u) < J_k(u^*)$ . V případě, že systém kritérií obsahuje jen jedinou funkci  $J$  a  $u^*$  je Pareto-optimální, pak zřejmě  $u^*$  realizuje maximum funkce  $J$  na množině  $U_0$ , a to dokonce jednoznačně.

Budeme říkat, že algoritmus provádí  $k$ -tý cyklus, provádí-li některý z kroků 2-6 pro  $i=k$ . Řízení, vypočtené na konci  $k$ -tého cyklu označíme  $u^k$ . Zřejmě  $u_i^k$  je definováno jen pro  $i \leq k$ . V důsledku (2.2) je také  $A(u^k)_i$  dobře definováno pro  $i \leq k$ .

Věta 2.1. Necht' platí (2.1)-(2.3). Pak:

- (a) algoritmus skončí po konečném počtu kroků,
- (b) při provedení kroku 6 "konec: nalezeno řízení" je sestrojeno řízení  $u^* = u^n \in U_0$ , které je Pareto-optimální vzhledem k systému kritérií  $\{J_k\}_{k \leq n}$ ,  $J_k(u) = u_k$ . Současně je  $u^*$  Pareto-optimální vzhledem k systému kritérií  $\{\hat{J}_k\}_{k \leq n}$ ,  $J_k(u) = A(u)_k$ .
- (c) Je-li  $U_0 = \emptyset$ , tj. úloha není říditelná, pak se provede v kroku 2 "konec: neexistuje přípustné řízení". Platí též opačná implikace.

Důkaz. (a) Jediné skoky zpět v algoritmu jsou v krocích 4 a 7 (skok na krok 2), avšak tyto mohou být provedeny nejvýše  $(1+2+\dots+n)$ -krát.

(b) V kroku 6 při prvním cyklu musí platit  $b_1 \leq u_1^1 \leq B_1$  a  $A(u^1)_1 \leq C_1$ , což je zajištěno kroky 3, 4 a 5.

Předpokládejme, že na konci  $k$ -tého cyklu máme nalezeno řízení  $u^k$  s  $b_i \leq u_i^k \leq B_i$  a  $A(u^k)_i \leq C_i$  pro všechna  $i \leq k$ . Zkoumejme nyní  $(k+1)$ -ní cyklus. Jestliže  $A(u)_{k+1} \leq C_{k+1}$  pro  $u = (u_1^k, \dots, u_k^k, b_{k+1})$ , pak skok v kroku 4 nebude proveden, a po skončení  $(k+1)$ -ního cyklu obdržíme řízení  $u^{k+1}$  s  $u_i^{k+1} = u_i^k$  pro  $i \leq k$ , a s  $u_{k+1}^{k+1}$  takovým, že  $b_{k+1} \leq u_{k+1}^{k+1} \leq B_{k+1}$  (v důsledku kroků 3 a 4) a  $A(u^{k+1})_{k+1} \leq C_{k+1}$  (v důsledku kroků 3 a 5). S ohledem na kauzalitu (2.2) bude také platit  $A(u^{k+1})_i \leq C_i$  pro všechna  $i \leq k+1$ .

Předpokládejme nyní, že v  $(k+1)$ -ním cyklu byl skok na krok 2 v kroku 4 proveden  $m$ -krát. Zřejmě  $m < k+1$ , v opačném případě by totiž algoritmus provedl "konec: neexistuje přípustné řízení" v kroku 2, a tudíž by se na konec  $(k+1)$ -ního cyklu (tj. na krok 6) vůbec nedostal. Na konci  $(k+1)$ -ního cyklu tedy obdržíme řízení  $u^{k+1}$  s  $u_i^{k+1} = u_i^k$  pro  $i \leq k-m$ ,  $u_i^{k+1} = b_i$  pro  $k-m+1 < i \leq k+1$ , a  $u_{k-m+1}^{k+1}$  takovým, že  $b_{k-m+1} \leq u_{k-m+1}^{k+1} \leq B_{k-m+1}$ . S ohledem na krok 5 máme také  $A(u^{k+1})_{k+1} \leq C_{k+1}$ . Protože platí  $u_i^{k+1} \leq u_i^k$  pro všechna  $i \leq k$ , platí také  $A(u^{k+1})_i \leq C_i$  pro všechna  $i \leq k$  jakožto důsledek vlastností (2.2) a (2.3) a výsledků z předchozího, tj.  $k$ -tého cyklu. Zvyšující postupně  $k$ , obdržíme pro  $k+1=n$  řízení



$u^* = u^n \in U_0$ .

Předpokládejme nyní, že existuje řízení  $\bar{u} \in U_0$  takové, že  $\bar{u} \neq u^*$  a  $\bar{u}_k \geq u_k^*$  pro všechna  $k$ . Tutíž  $\bar{u}_k > u_k^*$  pro některé  $k$ . Vzhledem k (2.3) platí  $A(\bar{u})_i > A(u^*)_i$  pro všechna  $i \geq k$ , a tedy musí platit  $A(u^*)_i < C_i$  pro všechna  $i \geq k$ . Vidíme tedy, že krok 5 nebyl v posledních  $n-k$  cyklech vůbec proveden, tutíž  $u_i^* = B_i$  pro všechna  $i \geq k$  (viz krok 3). Avšak  $u_k^* < \bar{u}_k \leq B_k$ , a dostáváme tedy spor, ukazující, že řízení  $u^* = u^n$  je Pareto-optimální vzhledem k systému kriterií  $\{J_k\}$ .

Předpokládejme ještě, že existuje řízení  $\bar{u} \in U_0$  takové, že  $\bar{u} \neq u^*$  a  $A(\bar{u})_k \geq A(u^*)_k$  pro všechna  $k$ . Tutíž  $A(\bar{u})_k > A(u^*)_k$  pro nějaké  $k$ . Vezmeme-li nejmenší  $k$  a takovou vlastností, dostaneme  $A(\bar{u})_i = A(u^*)_i$  pro všechna  $i < k$  a, díky (2.2) a (2.3), také  $\bar{u}_i = u_i^*$  pro všechna  $i < k$ . Navíc (2.3) implikuje  $\bar{u}_k > u_k^*$ . Protože  $\bar{u} \in U_0$ , musí platit  $A(u^*)_k < C_k$  a  $u_k^* < B_k$ . Existuje  $j$ ,  $k < j \leq n$ , takové, že  $A(u^*)_j = C_j$  a  $u_i^* = b_i$  pro všechna  $i$  s  $k < i \leq j$ . Jinými slovy, v  $j$ -tém cyklu algoritmus provedl skok v kroku 4 alespoň  $(j-k)$ -krát, a řízení  $u^j$  obdržené na konci tohoto cyklu již nebylo ve svých prvních  $j$  složkách měněno v následujících cyklech, tj.  $u_i^j = u_i^1$  pro  $i \leq j \leq 1$ . Jelikož  $\bar{u} \in U$ , musí platit  $\bar{u}_i \geq u_i^*$  pro všechna  $i \leq j$ . Tedy  $\bar{u}_k > u_k^*$  spolu s (2.3) implikuje  $A(\bar{u})_j > A(u^*)_j$ , tedy  $A(\bar{u})_j > C_j$ , což je spor s předpokladem  $\bar{u} \in U_0$ . Pareto-optimalita  $u^* = u^n$  vzhledem k systému kriterií  $\{\hat{J}_k\}$  je tedy dokázána.

(c) Jestliže úloha není říditelná, pak algoritmus musí

provést "konec: neexistuje přípustné řízení" v kroku 2 (to je důsledek tvrzení (a) a (b)). Naopak, jestliže toto provede v průběhu  $i$ -tého cyklu, pak  $A(u^i)_i > C_i$  pro  $u^i$  takové, že  $u_j^i = b_j$  pro všechna  $j$ ,  $1 \leq j \leq i$ . Jinými slovy, skok na krok 2 v kroku 4 musel být proveden  $i$ -krát. Avšak v důsledku kauzality (2.2) a monotonie (2.3) systému musí platit  $A(u)_i > C_i$  pro všechna  $u \in U$ . To ale znamená, že systém není říditelný.  $\square$

Je třeba si uvědomit, že optimalita ve smyslu Pareto je tím slabší, čím větší je příslušný systém kritérií. Z tohoto hlediska je tvrzení Věty 2.1 poměrně slabé, neboť  $n$  bývá velké. Např. každé řízení  $u \in U_0$  s  $A(u)_n = C_n$  je za podmínky (2.3) Pareto-optimální vzhledem k systému kritérií  $\{J_k\}_{k \leq n}$ .

Algoritmus však konstruuje v každém cyklu řízení  $u^k$  postupně pro  $k=1, 2, \dots, n$ , přitom každé  $u^k$  je Pareto-optimální současně vzhledem k systému kritérií  $\{J_i\}_{i \leq k}$  i  $\{\hat{J}_i\}_{i \leq k}$ . To naznačuje, že by výsledné řízení  $u^n$  mohlo mít lepší vlastnosti než jen ty z Věty 2.1. Skutečně dokážeme, že  $u^n$  je optimální v klasickém smyslu (tj. vzhledem k jednomu kritériu) dokonce s ohledem na velmi velkou množinu kritérií současně, což také ospravedlňuje termín "multi-optimální" řízení, užitý v názvu této kapitoly. Tento jev je, zhruba řečeno, způsoben tím, že úloha zahrnuje mnoho lineárně nezávislých omezení (2.4) a (2.5), takže na hranici množiny  $U_0$  existují body, ve kterých má normálový kužel k

množině  $U_0$  neprázdný vnitřek v  $R^n$ . Řízení  $u^n$  zkonstruované algoritmem je právě jedním z těchto bodů.

Řekneme, že řízení  $u \in U_0$  je ostře lokálně  $w$ -optimální pro nějaké  $w \in R^n$ , existuje-li okolí  $N$  bodu  $u$  takové, že  $\forall \bar{u} \in N \cap U_0 \setminus \{u\}$ :  $\sum_i w_i \cdot u_i > \sum_i w_i \cdot \bar{u}_i$ . Jinými slovy,  $u$  je izolovaným lokálním maximem funkce  $\langle \cdot, w \rangle$  na množině  $U_0$ , kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označuje obvyklý skalární součin v  $R^n$ .

Věta 2.2. Necht' platí (2.1)-(2.3), zobrazení  $A$  je spojitě diferencovatelné z okolí  $U$  do  $R^n$ , a  $U_0 \neq \emptyset$ . Pak existuje  $W \subset R_+^n = \{w \in R^n; \forall i: w_i > 0\}$  taková, že  $W$  je otevřená neprázdná, a řízení  $u^n$  získané algoritmem je ostře lokálně  $w$ -optimální pro všechna  $w \in W$ .

Důkaz. Budeme vyšetřovat lokální chování množiny  $U_0$  v bodě  $u$  pomocí tzv. kontingentních kuželů. Kontingentní kužel  $T_K(u)$  v bodě  $u$  k množině  $K$  (viz [1]) je definován jako množina:

$$T_K(u) = \{v \in R^n; \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha > 0 \exists \bar{u} \in R^n: \|\bar{u} - v\| \leq \varepsilon \text{ a } \exists h, 0 < h \leq \alpha: \\ u + h \cdot \bar{u} \in U\}.$$

Podle [1, Ch. 7, Sec. 6, Proposition 3] platí:

$$(2.6) \quad T_{U_0}(u^n) \subset T_U(u^n) \cap A'(u^n)^{-1} T_D(A(u^n)),$$

kde  $D = \{x \in R^n; \forall i: x_i \leq C_i\}$  a  $A'(u)$  značí derivaci operátoru  $A$  v bodě  $u$ . Označíme-li  $T^* = \{w \in R^n; \forall u \in T: \sum_i w_i u_i \leq 0\}$

tzv. polární kužel ke kuželu  $T$ , můžeme vzhledem k (2.6) psát odhad:

$$T_{U_0}^*(u) \supset \text{co}(T_U^*(u^n), A'(u^n)^* T_D^*(A(u^n))),$$

kde  $A'(u^n)^*$  značí adjungovaný operátor (tj. transponovanou matici) k  $A'(u^n)$ .

Označme  $e^k$  vektor o složkách  $e_i^k=1$  pro  $i=k$ , a  $e_i^k=0$  pro  $i \neq k$ . Zřejmě platí:

$$u_k^n = B_k \Rightarrow e^k \in T_U^*(u^n) \subset T_{U_0}^*(u^n),$$

$$u_k^n = b_k \Rightarrow -e^k \in T_U^*(u^n) \subset T_{U_0}^*(u^n),$$

$$A(u^n)_k = C_k \Rightarrow e^k \in T_D^*(A(u^n)),$$

tedy

$$A(u^n)_k = C_k \Rightarrow A'(u^n)^* e^k \in T_{U_0}^*(u^n).$$

Označme matici  $A'(u^n) = [a_{ij}]$ . Vzhledem k (2.2) a (2.3) musí být  $a_{ij} = 0$  pro  $i < j$  a  $a_{ij} > 0$  pro  $i \geq j$ . Při vhodném výběru (podle toho, která z uvedených rovností se realizuje pro dané  $k$ ) z vektorů tvaru  $e^k$ ,  $-e^k$ , nebo  $A'(u^n)^* e^k$  můžeme při vhodném uspořádání sestavit (po řádcích) blokově horní trojúhelníkovou matici  $B$ , jejíž diagonální bloky budou buď rovny 1 (je-li  $u_k^n = B_k$ ), nebo

$$\begin{bmatrix} a_{k,k}, a_{k,k-1}, \dots, a_{k,k-i} \\ -1, 0, \dots, 0 \\ 0, -1, \dots, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

je-li  $A(u^n)_k = C_k$  a algoritmus v  $k$ -tém cyklu provedl skok v kroku 4 právě  $i$ -krát; pak totiž  $u_j^k = b_j$  pro  $j = k, k-1, \dots, k-i-1$ , a  $A(u^k)_k = C_k$ , přičemž hodnoty  $u_j^k$  pro  $j \leq k$  nebyly již v následujících cyklech algoritmu opraveny. Samozřejmě, je-li  $A(u^n)_k = C_k$  a algoritmus se nevracel, redukuje se příslušný diagonální blok matice  $B$  na  $(a_{k,k})$ . Přitom každý řádek matice  $B$  je vektor patřící do kužele  $T_{U_0}^*(u^n)$ . Je ihned zřejmé, že determinant matice  $B$  je součin činitelů tvaru 1 nebo  $a_{k,k-i}$  pro  $i \geq 0$ , což je v důsledku (2.3) nenulové číslo. Z toho plyne, že konvexní kužel  $T_{U_0}^*(u^n) \subset \mathbb{R}^n$  obsahuje  $n$  lineárně nezávislých vektorů, a tedy má neprázdný vnitřek.

Nechť existuje  $i \leq n$  takové, že  $A(u^n)_i = C_i$  a  $u_k^n = B_k$  pro všechna  $k > i$  (tj. algoritmus provedl v posledních  $n-i$  cyklech skok na krok 6 v kroku 3). Potom platí

$$(2.7) \quad w = \sum_{k>i} e^k + A(u^n)^* e^i \in T_U^*(u^n).$$

Zřejmě platí  $w_j = 1$  pro  $j > i$  a  $w_j = a_{ij}$  pro  $j \leq i$ . Tedy

$$(2.8) \quad w \in R_+^n \cap T_{U_0}^*(u^n).$$

Položíme  $W = R_+^n \cap \text{int}(T_U^*(u^n))$ , kde  $\text{int}(\cdot)$  značí vnitřek množiny. Zřejmě  $W$  je otevřený konvexní kužel. Kdyby  $W$  byl prázdný, pak také  $R_+^n \cap T_{U_0}^*(u^n)$  by byl prázdný (připomeňme, že  $R_+^n$  je otevřený), což vzhledem k (2.8) není možné. V případě, že index  $i$  s předpokládanou vlastností neexistuje, tj.  $u_k^n = B_k$  pro všechna  $k$ , pak v součtu (2.7) poslední sčítanec prostě vynecháme, (2.8) zůstává potom v platnosti.

Pro libovolný kužel  $T$  a pro všechny  $w \in \text{int}(T^*)$  zřejmě platí  $\sum_i w_i \cdot u_i < 0$  pro všechna  $u \in T \setminus \{0\}$ . Z toho plyne, že pro všechna  $w \in \text{int}(T_{U_0}^*(u^n))$  je  $u^n$  ostře lokálně  $w$ -optimální. Speciálně to tedy platí pro všechna  $w \in W$ . □

### II.3 Příklad systému s monotónním chováním

Podmínka monotónie (2.3), jež měla pro předchozí výsledky podstatný význam, je bohužel velice omezující, a v nelineárních nebo mnohorozměrných systémech bychom ji těžko dokazovali, a bylo by třeba dalších jemných podmínek, neboť (2.3) obecně asi neplatí. Nyní bude uveden jednorozměrný lineární případ ohřevu s vhodnou množinou  $U$ , kde lze podmínku (2.3) přímo dokázat. Uvidíme, jak jemné vlastnosti se přitom používají.

Mějme lineární rovnici vedení tepla v bezrozměrném tvaru ( $z=z(x,t)$  je teplota):

$$\partial z / \partial t = \partial^2 z / \partial x^2 \quad \text{pro } 0 < x < 1, 0 < t < 1,$$

s okrajovými podmínkami:

$$\partial z / \partial x = 0 \quad \text{pro } x = 0, 0 < t < 1,$$

$$-\partial z / \partial x = a \cdot (z - v(t)) \quad \text{pro } x = 1, 0 < t < 1,$$

a počáteční podmínkou:

$$z = 0 \quad \text{pro } 0 < x < 1, t = 0.$$

To odpovídá nekonečné desce tloušťky 2, symetrické okolo roviny  $x=0$ , a ohřivané z obou stran v peci o teplotě  $v(t)$  s koeficientem přestupu tepla mezi pecí a deskou  $a>0$ . Vznikající kvazistacionární termoelastické napětí je úměrné funkci  $s=s(x,t)$ :

$$s(x,t) = z(x,t) - \int_0^1 z(\bar{x},t) d\bar{x}.$$

Po časové semidiskretizaci implicitní Eulerovou metodou s krokem  $1/n$  dostaneme rekurzivní vztah (posloupnost dvoubodových okrajových úloh) pro funkce  $z_k(x)$  ( $z_k$  představuje aproximaci funkce  $z(.,k/n)$ ):

$$n \cdot (z_k - z_{k-1}) = \partial^2 z_k / \partial x^2 \quad \text{pro } 0 < x < 1, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \partial z_k / \partial x &= 0 && \text{pro } x = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \\ -\partial z_k / \partial x &= a \cdot (z_k - v_k) && \text{pro } x = 1, \quad k=1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

kde  $v_k = v(k/n)$ , a počáteční podmínkou:

$$z_0 = 0 \quad \text{pro } 0 < x < 1.$$

Přirozeně, pro odpovídající napětí platí:

$$s_k(x) = z_k(x) - \int_0^1 z_k(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$

Vezmeme množinu  $U$  tvaru (2.4) s  $b_i \geq 0$ , a položíme

$$(2.9) \quad v_1 = u_1, \quad v_k = v_1 + \sum_{i=1}^k u_i/n.$$

Platí tedy rekurze  $n \cdot (v_k - v_{k-1}) = u_k$ . Zřejmě  $v_k$  má význam teploty v peci v čase  $t = k/n$ , vektor řízení  $u$  se skládá z počáteční teploty pece  $u_1$  a rychlosti ohřevu v peci v  $k$ -tém časovém intervalu  $u_k$ . Veličina  $s_k = \max_{0 \leq x \leq 1} s_k(x)$  má význam maximálního tlakového napětí v čase  $t = k/n$ . Podobně bychom mohli sledovat maximální tahové napětí  $-\min_{0 \leq x \leq 1} s_k(x)$ .



Věta 2.3 Zobrazení  $A:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  s  $U$  ve tvaru (2.4) s  $b_i > 0$ , které přiřazuje vektoru řízení  $u \in \mathbb{R}^n$  vektor maximálních napětí  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ , je monotónní ve smyslu (2.3).

Důkaz. V důsledku  $b_i > 0$  pro všechna  $u \in U$  platí  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq u_n$ , kde  $v$  je funkcí  $u$  podle (2.3). Vzhledem k nulové počáteční podmínce realizují všechna přípustná řízení ohřev. Uvážíme-li ještě monotónní chování rovnice vedení tepla a implicitní Eulerovy formule, vidíme, že  $z_k(x)$  je rostoucí funkcí argumentu  $x$  pro všechna  $k$ ,  $u \in U$ , a  $0 \leq x \leq 1$ . Tedy  $s_k = z_k(1)$ , a můžeme použít linearitu, ze které plyne, že

$$s_k = \sum_{i=1}^k a_{k-i} u_i .$$

Užili jsme samozřejmě ještě autonomie systému. Koeficienty  $a_k$  představují impluzní odezvu systému, tj. odezvu na řízení  $u$ :  $u_1 = 1$ ,  $u_i = 0$  pro  $i \geq 2$ . To odpovídá odezvě na teplotu pece  $v_i = 1$  pro všechna  $i \geq 1$ . Z monotónního chování rovnice vedení tepla a implicitní Eulerovy formule je opět vidět, že odezva  $s = (s_k)$  na takové buzení je kladná, tj.  $s \in \mathbb{R}_+^n$ . Tedy  $a_i > 0$  pro všechna  $i$ , a vlastnost (2.3) je nyní již evidentní.  $\square$

Je třeba zdůraznit, že bylo podstaným způsobem použito monotónního chování jednorozměrného systému, které zaručuje, že se maximální napětí nabývají stále v jednom bodě pro všechny přípustné režimy ohřevu (v uvažovaném případě tlakových napětí je to na povrchu desky). To umožňuje použít

linearity, která zase umožňuje vyšetřovat chování systému pomocí jeho impulzní odezvy.

Je zřejmé, že vlastnosti (2.1) a (2.2) jsou rovněž splněny. Aplikací Věty 2.2 dostáváme tedy tvrzení, že řízení  $u_n$  sestavené algoritmem, je lokálním izolovaným maximem vzhledem ke kritériu  $u \mapsto \sum_i w_i \cdot u_i$  s nějakými kladnými váhami  $w_i$ , a navíc množina vah s touto vlastností je dosti velká (má neprázdný vnitřek v  $R^n$ ). Kdyby bylo možno položit  $w_i = \text{konst.}$  pro všechna  $i$ , dostali bychom jako kritérium přímo teplotu v peci v čase  $t=1$ . Není ovšem zřejmé, patří-li takové  $w$  do množiny  $W$  z Věty 2.2.

Zdůrazněme ještě jeden otevřený problém, totiž chování pro limitní přechod ke spojitému případu, tj.  $n \rightarrow +\infty$ . Z kompaktnosti množiny přípustných řízení

$$\left\{ u = (u_{\text{init}}, u_r) \in R \times L_\infty(0,1); 0 \leq u_{\text{init}} \leq \text{konst. a} \right. \\ \left. 0 \leq u_r(t) \leq \text{konst.} \text{ pro s.v. } t \right\},$$

což představuje limitní případ dříve uvažovaných množin  $U$  pro  $n \rightarrow +\infty$  ( $u_{\text{init}}$  je počáteční teplota pece,  $u_r(t)$  je rychlost ohřevu v čase  $t$ ), vzhledem ke slabé topologii prostoru  $R \times L_2(0,1)$ , ze spojitosti stavového operátoru (tj. operátoru  $A$  příslušícího nediskretizovaným diferenciálním rovnicím), z konvergence implicitní Eulerovy formule, a z uzavřenosti množiny přípustných napětí ve vhodných topologiích dostáváme standardními postupy (viz např. [11]) kon-

vergenci některé vybrané posloupnosti z  $u^n_{n=1}$  k přípustnému řízení. Není ovšem zřejmé, zda je takové řízení optimální k nějakému kritériu tvaru

$$w_1 \cdot u_{init} + \int_0^1 u_r(t) \cdot w_r(t) dt$$

s váhou  $w_1 > 0$  a  $w(t)_r > 0$ . Vhodně normovaná posloupnost vah  $(w_1, w_r)$  sice konverguje slabě v prostoru  $R \times L_2(0,1)$ , to však nestačí ke spojitosti skalárního součinu (připomeňme, že řízení konvergují také jen slabě), a navíc není ani zřejmé, zda by slabá limita nebyla rovna nule, což by nedávalo netriviální optimalizační úlohu.

#### II.4 Test algoritmu na modelovém příkladu

Algoritmus byl ověřen experimentálně na úloze, která je podstatně horší z hlediska řízení než úlohy řízení ohřevu reálných materiálů. V této modelové úloze bylo totiž maximální redukované napětí omezeno (na 250 MPa) po celou dobu ohřevu, tj. i po dobu překrytalizace, což bylo klasickými metodami zvládnutelné jen s nejvyšším úsilím a s mnoha numerickými experimenty (viz [13], kde se navíc používá místo maximálního redukovaného napětí pouze maximálního rozdílu teplot v dané časové hladině). Zde uvedený algoritmus pracoval i pro tuto úlohu naprosto spolehlivě s velmi pěknými výsledky, i když předpoklad (2.3) nebyl za-

ručen.

Je třeba zdůraznit některé výhody našeho algoritmu proti klasickým metodám optimálního řízení; viz [11]. Klasické metody vyžadují mnohokrát řešit stavovou rovnici i příslušnou sdruženou rovnici pro výpočet kritéria a jeho gradientu, což vyžaduje mnoho strojového času i mnoho paměti, neboť celé řešení je nutno uchovat v paměti pro výpočet sdružených rovnic. Navíc programování sdružených rovnic bývá velice pracná záležitost. Dále je vyžadována dobrá počáteční aproximace optimálního řízení a dobrá volba celé řady parametrů pro optimalizační algoritmus, což může být dosti citlivá otázka. Nejvíce nepříjemná ovšem bývají stavová omezení, která musí být odstraněna duálními metodami. Navíc optimální řízení není dosaženo po konečném počtu kroků optimalizačního algoritmu. Za to vše dostáváme tu výhodu, že známe kritérium, vzhledem ke kterému je získané řízení "téměř" optimální, a můžeme provést analýzu úlohy co se týče konvergence. Význam těchto výhod je však poněkud setřeno skutečností, že v praxi připadají v úvahu často dosti různá kritéria, a jsme pak postaveni před otázku, které kritérium vlastně zvolit; viz diskuse v [12].

V případě našeho algoritmu je situace právě opačná. Je rychlý, nepotřebuje mnoho paměti ani řadu parametrů, není třeba programovat sdružené rovnice ani ošetřovat stavová omezení duálními metodami. Jeho výsledky je možno ovšem ověřovat pouze empiricky, což ale vzhledem k nejistotě "které

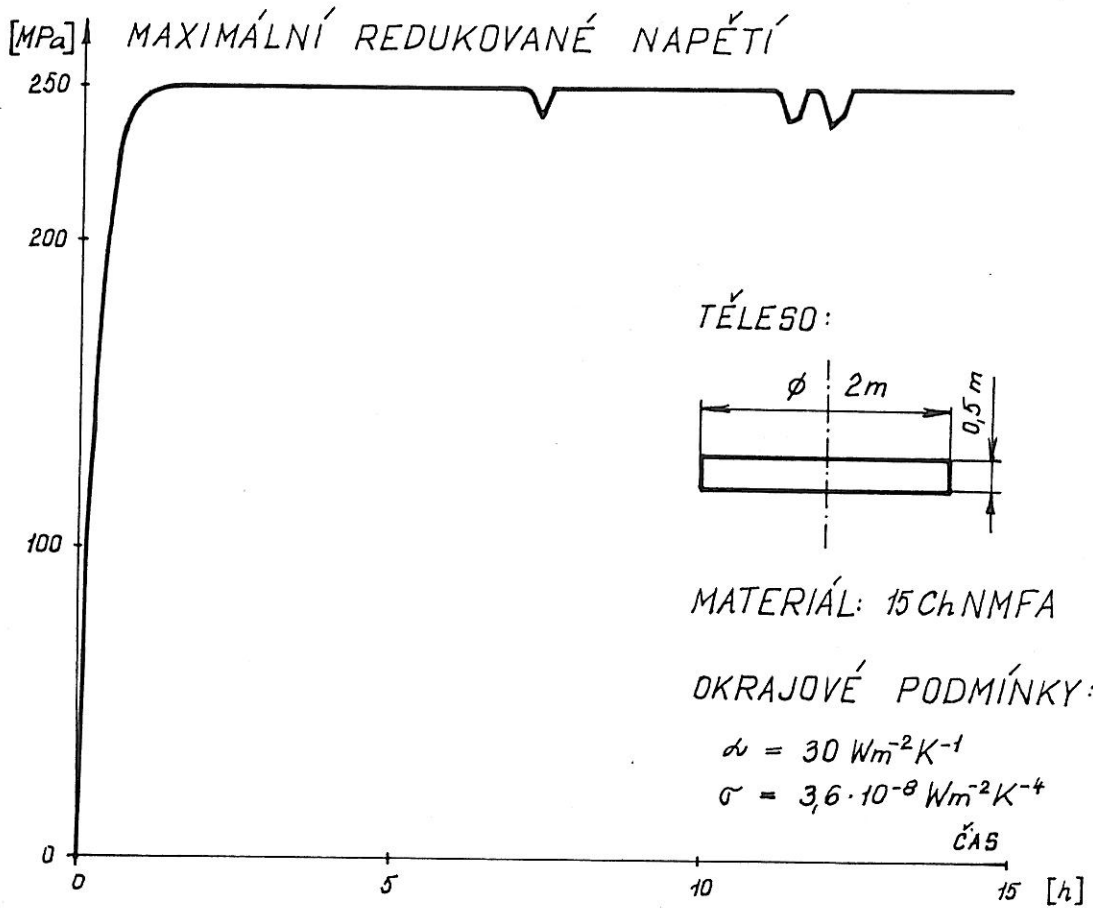
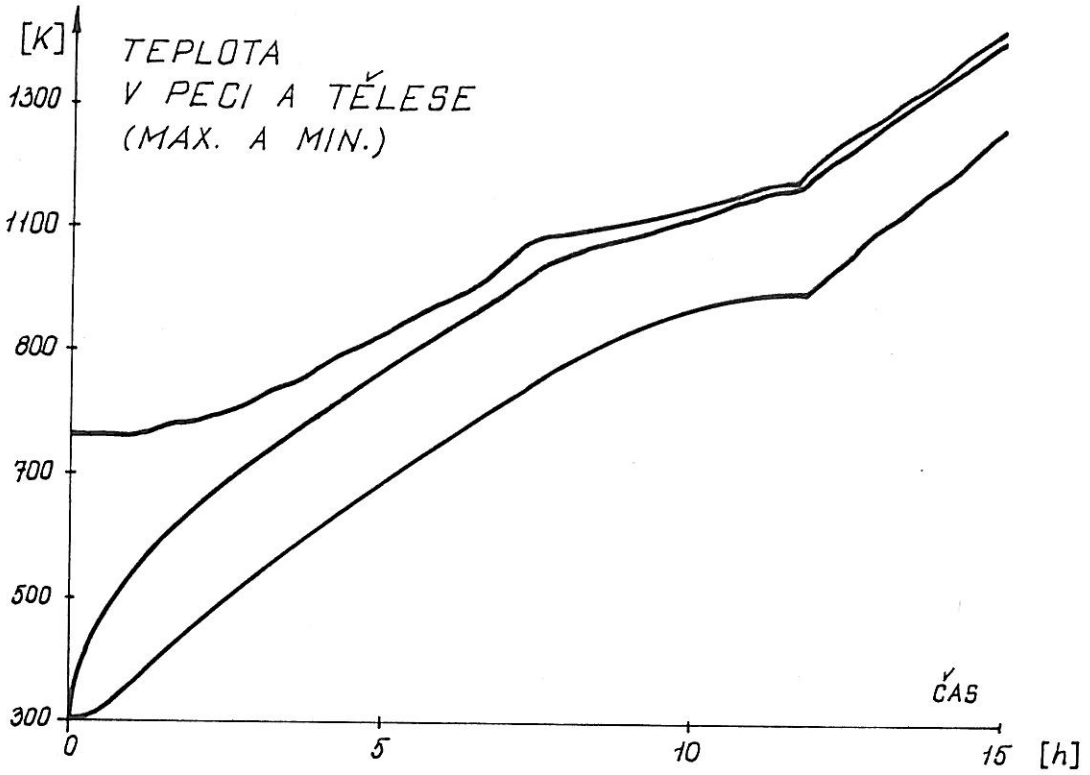
kritérium je to právě" činíme vlastně i u klasických metod optimálního řízení.

Pro experimenty s modelovou úlohou byl použit model podrobně popsáný v [11] pro modelové rotačně symetrické těleso (viz obr.1) a s omezením maximálního redukovaného napětí nezávislým na teplotě (250 MPa). Režim ohřevu sestavený algoritmem, spolu s odezvou maximální a minimální (v daném čase) teploty v tělese jako funkce času, jakožto i s odezvou maximálního redukovaného (podle kritéria Hencky-Miezes-Huber) termoelastického napětí v tělese jsou uvedeny na obr.1. Na odezvě napětí je možno pozorovat 4 časové úseky, ve kterých je napětí menší než zvolená mez; v ostatních částech je zvolená mez 250 MPa sledována s přesností 1 MPa, ale nebylo by problémem dosáhnout přesnosti řádově větší. V prvním a třetím ze zmíněných úseků se algoritmus vracel zpět (skok na krok 2 v kroku 4) a v těchto úsecích je rychlost ohřevu v peci minimální (=0). Ve druhém a čtvrtém úseku algoritmus provedl skok na krok 6 v kroku 3 a v těchto úsecích je naopak rychlost ohřevu pece maximální (= 90 K/h). První úsek odpovídá náběhu napětí z původně nulové hodnoty v čase  $t=0$  na hodnotu 250 MPa. Ve skutečnosti byl pro urychlení výpočtu tento úsek ošetřen tak, že se předem položila rychlost ohřevu rovna nule po dostatečně dlouhou dobu a předmětem výpočtu pak byla počáteční teplota pece, která se stanovila tak, aby odezva napětí právě dosahoval 250 MPa s předepsanou přesností. Od času, pro

který tato odezva dosáhla této meze, pokračoval již algoritmus skutečně výše popsaným způsobem. Druhý úsek nastává těsně po začátku překrytí krystalizace v tělese (ta začíná samozřejmě na hraně tělesa), třetí úsek je těsně před koncem překrytí krystalizace v tělese (překrytí krystalizace končí ve středu tělesa), a čtvrtý úsek je těsně po konci překrytí krystalizace.

Rovnice  $X(x)=C_i$  v kroku 5 se řešila iteračně, derivace  $X$  se v celém časovém intervalu odhadla diferenčním podílem  $(X(B_i)-X(b_i))/(B_i-b_i)$ . Předepsaná přesnost 1 MPa byla dosažena zpravidla po jedné, nejvýše dvou iteracích. Algoritmus si potřebuje pamatovat tolik časových úrovní, o kolik se v průběhu výpočtu maximálně vrací, t.j. maximum rozdílu  $i-j$  během výpočtu. Toto číslo je ovšem předem neznámé, a závisí samozřejmě též na délce zvoleného časového kroku. Časové hladiny, které se uchovávají v paměti je vhodné implementovat jako frontu (FIFO).

Pro diskretizaci bylo v tomto případě použito 79 časových úrovní a síť  $10 \times 6$  bodů v prostoru, obojí s nerovnoměrným dělením. Výpočet vyžaduje řádově asi 10 minut CPU počítače IBM 370/135. Rychlost algoritmu i relativně malé nároky na paměť umožňují však diskretizaci podstatně zjemnit, což by umožnilo řízení ohřevu tvarově složitějších těles i respektování prostorově složitějších okrajových podmínek.



Obr. 1

LITERATURA

- [1] J. P. Aubin, I. Ekeland : Applied Nonlinear Analysis. J. Wiley, New York, 1984
- [2] O.V. Běsov, V.P. Il'jin, S.M. Nikol'skij : Intěgral'nyje predstavlenija funkcij i těoremy vloženiija. Nauka, Moskva 1975
- [3] J. Jarušek : Contact problems with bounded friction, Coercive case. Czech. Math. J. 33 (108) (1983), 237 - 261
- [4] J. Jarušek : Kontaktní úlohy s třením. Kandidátská disertace. Praha 1980
- [5] J. Jarušek : Teoretické řešení časově optimálního ohřevu velkých výkovků s ohledem na zachování jejich celistvosti. Zpráva ÚTIA č. 1366, Praha 1985
- [6] J. Jarušek, J. Pacovský : Řešení tepelně napjatostního stavu při ohřevu těles. Zpráva ÚTIA č. 1239, Praha 1983
- [7] O.A. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva : Linějnyje i kvazilinějnyje uravněniija parabolického tipa. Nauka, Moskva 1967
- [8] J.L. Lions, E. Magenes : Problèmes aux limites non-homogènes et applications. Dunod, Paris 1968
- [9] J. Nečas : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Praha 1967
- [10] J. Nečas, J. Jarušek, J. Haslinger : On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction. Boll.Un. Mat. Ital. (5) 17-B (1980), 796 - 811



- [11] T. Roubíček : Optimální řízení nelineárních parabolických rovnic. Kandidátská disertace. SVT ČSAV, Praha 1985
  
- [12] T. Roubíček : A model and optimal control of multidimensional thermoelastic processes within a heating of large bodies. Probl. Control Inf. Theory ( v tisku)
  
- [13] T. Roubíček : Optimal control of a Stefan problem with state-space constraints. Numerical approximation. Numer. Math. (v tisku)
  
- [14] A. Visintin : Sur le problème de Stefan avec flux non-linéaire. Preprint No. 230, Ist. Anal. Numer. C.N.R., Pavia 1981