Úloha 1. Označme $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ součet prvních N členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_1^\infty$, d její diferenci. Určete

1. d, a_1, a_8, s_{11}, pokud je známo $a_4 = 6$ a $a_{11} = 34$.
2. a_1, d, pokud je známo $s_5 = s_6 = 60$.

Úloha 2. Označme $(a_n)_1^\infty, d, s_N$ jako v předchozí úloze. Dokažte, že

$$S_N = N\frac{a_1 + a_N}{2} = \frac{N}{2}(2a_1 + (N-1)d)$$

Úloha 3. Označme $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ součet prvních N členů geometrické posloupnosti $(a_n)_1^\infty$, q její kvocient. Určete

1. q, a_1, s_6, pokud je známo $a_2 = 48$ a $a_5 = 162$.
2. a_6, s_8, pokud je známo $a_3 = 1$ a $q = \frac{1}{3}$.

Úloha 4. Ukažte, že součet dvou aritmetických posloupností je aritmetická posloupnost a součin dvou geometrických geometrická. Dále ukažte, že je-li $(a_n)_1^\infty$ geometrická posloupnost, jejíž všechny členy jsou kladné, pak je posloupnost $(\log a_n)_1^\infty$ aritmetická. Jaký je vztah kvocientu a diference těchto posloupností?

Úloha 5. Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ je součet prvních N členů geometrické posloupnosti $(a_n)_1^\infty$. Ukažte, že posloupnost $(s_{kN} - s_{(k-1)N})_{k=1}^\infty \equiv (s_N, s_{2N} - s_N, s_{3N} - s_{2N}, \ldots)$ je také geometrická.

Úloha 6. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Úloha 7. Dokažte, že N-tý částečný součet aritmeticko-geometrické řady pro $q \neq 1$ je

$$\sum_{n=1}^{N} nq^n = q\frac{1-q^N}{(1-q)^2} - \frac{Nq^{N+1}}{1-q}$$

Úloha 8. Označme $(a_n)_1^\infty$ Fibonacciho posloupnost danou rekurentním předpisem $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$. Dokažte, že její n-tý člen je možné explicitně vyjádřit jako

$$a_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

kde $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$ je *zlatý řez*. Fibonacciho posloupnost je tedy součet dvou geometrických posloupností s kvocienty ϕ a $-\phi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Úloha 9. Dokažte, že posloupnost $(a_n)_1^\infty$ daná rekurentně $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} := 2(a_{n+1} - a_n)$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ se dá explicitně vyjádřit jako $a_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n)$. Umíte najít jednoduché explicitní vyjádření této reálné posloupnosti, které se obejde bez komplexních čísel?

Úloha 10. V rovině uvažujme množinu n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Určete, na kolik oblastí tato množina přímek rozděluje rovinu. *Návod:* Představte si, že přidáváte n-tou přímku, najděte rekurentní vztah, odhadněte explicitní a dokažte indukcí.

Úloha 11. Posloupnost $(a_n)_0^\infty$ je dána rekurentním vztahem $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$, $a_0 = 0$. Určete explicitní vztah pro a_n.

Úloha 12. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují čísla $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ taková, že $(1-\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}$. Najděte rekurentní vztah pro posloupnosti $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pomocí něj najděte racionální číslo $\frac{p}{q}$, které aproximuje $\sqrt{2}$ s přesností lepší než 10^{-3}. Ukažte, že posloupnost $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kde $r_n = p_n^2 - 2q_n^2$, je geometrická, a zapište ji explicitně. Ukažte, že pro n liché platí

$$0 < \sqrt{2} - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{2q_n^2}$$

a odvoďte analogické nerovnosti pro n sudé.