Písemka z MA č. I z dubna 2001 – zadání

Příklad 1. Nalezněte všechna řešení rovnice

$$y'(x-1) = y \ln y\,.$$

Příklad 2. Nalezněte řešení úlohy

$$y''' - 2y'' + y' = e^x\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 1\,.$$

Příklad 3. Zjistěte, jestli konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n} \sin 2n\,.$$

Příklad 4. Sečtěte řadu

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,.$$

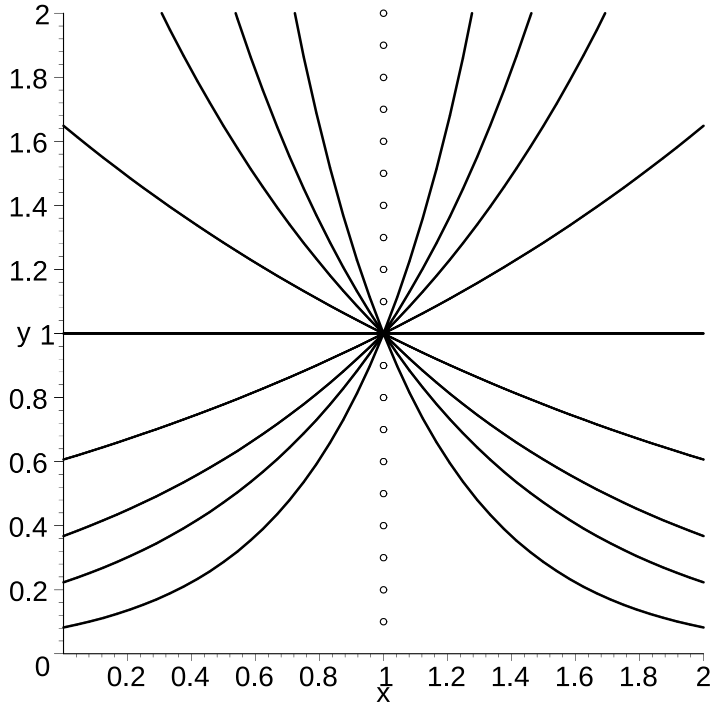
Písemka z MA č. I z dubna 2001 – řešení

Příklad 1. Nalezněte všechna řešení rovnice

$$y'(x-1) = y \ln y \, .$$

Řešení: Triviální řešení je $y = 1$, dále plyne, že vždy musí být $y > 0$. Po převedení rovnice na tvar $y' = f(x,y)$ zjistíme, že $f(x,y) = \frac{y \ln y}{x-1}$ a tedy derivace f dle y je $\frac{\ln y + 1}{x-1}$. Vidíme, že pro $x = 1$ se může dít něco podezřelého. Přímým výpočtem metodou separace proměnných dále odvodíme, že všechna řešení mají tvar $y = e^{K(x-1)}$, $K \in \mathbb{R}$.

Cvičení: Když si nakreslíte grafy všech řešení, zjistíte, že všechna procházejí bodem $[1,1]$, ve kterém se vytváří „vějíř". Když se pokusíme slepit dvě různá řešení v tomto kritickém bodě, vidíme, že slepená funkce není řešením (má v onom bodě hrot - nemá tam tedy derivaci a nemůže být řešením). Proč tady nefunguje věta o nalepování řešení?



Příklad 2. Nalezněte řešení úlohy

$$y''' - 2y'' + y' = e^x \, , \qquad y(0) = y'(0) = 0 \, , \; y''(0) = 1 \, .$$

Řešení: Jde o víceméně mechanický výpočet: rovnici s nulou na pravé straně vyřešíme metodou charakteristického polynomu, který má jednonásobý kořen $\lambda = 0$ a dvojnásobný kořen $\lambda = 1$. Dostaneme tedy fundamentální systém $\{1, e^x, xe^x\}$. Jedno partikulární řešení rovnice s pravou stranou najdeme například jeho „uhodnotím" podle tvaru pravé strany. Pravá strana rovnice je e^x, což je $e^{\lambda x}$ pro $\lambda = 1$.

Toto číslo je ovšem dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu rovnice, což se projeví faktorem x^2 ve tvaru partikulárního řešení. To tedy hledáme ve tvaru (jako ansatz) $y_p = ax^2e^x$. Dosazením do rovnice zjistíme $a = 1/2$. Obecné řešení rovnice s pravou stranou je tedy $y = \frac{1}{2}x^2e^x + c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$. Dosazením okrajových podmínek získáme konečně jediné řešení $y = \frac{1}{2}x^2e^x$.

Cvičení: Nalezněte partikulární řešení metodou variace konstant. Vyšlo vám totéž? Musí vyjít totéž?

Příklad 3. Zjistěte, jestli konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n} \sin 2n\,.$$

Řešení: Použijeme Abel-Dirichetovo kritérium. Označme $b_n = \frac{\ln^3 n}{n}$, $a_n = \sin 2n$. Trojnásobným použitím l'Hospitalova pravidla typu „∞/∞" není těžké spočítat, že $\lim b_n = 0$. Dále chceme ukázat, že b_n klesá (stačí, když od jistého indexu). To nejsnáze ukážeme derivováním funkce $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$: $f'(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}(3 - \ln x)$. Vidíme, že $f' < 0$ pro $x > e^3$, a tedy posloupnost b_n je klesající pro $n > e^3$. Celkem: $b_n \searrow 0$. Zbývá ukázat, že posloupnost částečných součtů $|\sum_{n=1}^{N} \sin 2n|$ je omezená konstantou nezávislou na N. To se ukáže pomocí komplexní exponenciály (jako na přednášce):

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \sin 2n\Big| = \Big|\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{N} e^{2ni}\Big| \le \Big|\sum_{n=1}^{N} e^{2ni}\Big| = \Big|e^{2i}\frac{1-e^{2Ni}}{1-e^{2i}}\Big| \le \frac{2}{|1-e^{2i}|}\,.$$

Podle Abel-Dirichletova kritéria tedy daná řada konverguje.

Cvičení: Promyslete si uvedený postup a odůvodněte na základě něj, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n} \sin 2n$.

Příklad 4. Sečtěte řadu

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,.$$

Řešení: Označme $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Mocninná řada vpravo má poloměr konvergence $R = 1$, lze tedy dosadit $x = \frac{1}{2}$, a tedy $A = f(1/2)$. Zbývá najít vyjádření f: uvnitř kruhu konvergence lze mocninnou řadu derivovat člen po členu a pak ji snadno sečteme: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ (geometrická řada). Tedy $f(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + c$. Konstantu c určíme dosazením $x = 0$: dostáváme $0 = f(0) = -\ln 1 + c$, tedy $c = 0$ a proto $f(x) = -\ln(1-x)$. Závěr: $A = f(1/2) = -\ln(1-1/2) = \ln 2$.

Cvičení: Napište řadu, jejíž součet je přirozený logaritmus libovolného předem zadaného čísla $a > \frac{1}{2}$.

Řešení cvičení

Cvičení k příkladu 1.

Různé větve řešení lze pro rovnici $y' = f(x,y)$ slepovat jen v bodech, ve kterých je $f(x,y)$ spojitá (nalistujte si příslušnou větu). V našem případě je $f(x,y) = \frac{y \ln y}{x-1}$, je tedy nespojitá v $x = 1$, a proto se může stát (a stalo se), že různá řešení nepůjde v bodě $x = 1$ slepit. Hle, k čemu jsou dobré předpoklady vět…

Cvičení k příkladu 2.

Metoda variace konstant: hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_p = c_1(x) + c_2(x)e^x + c_3(x)xe^x$. Pro neznámé funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$, dostáváme následující systém ODR:

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)e^x + c_3'(x)xe^x &= 0\,, \\ c_2'(x)e^x + c_3'(x)(x+1)e^x &= 0\,, \\ c_2'(x)e^x + c_3'(x)(x+2)e^x &= e^x\,, \end{aligned}$$

jehož řešením dostaneme $c_1(x) = e^x$, $c_2(x) = -\frac{x^2}{2} - x$, $c_3(x) = x$, a tedy $y_p = e^x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$, a dále postupujeme jako dříve. Uvědomte si: partikulární řešení nemusí vyjít vždy stejné (je to **jedno z řešení** nehomogenní rovnice). Ale: dvě různá partikulární řešení se vždy liší pouze o nějaký prvek z fundamentálního systému řešení homogenní rovnice (rozmyslete si to).

Cvičení k příkladu 3.

Řešení: Stejným postupem jako v příkladu č. 3 ukážeme, že funkce $f(x) = \frac{\ln^k x}{x}$ má derivaci $f'(x) = \frac{\ln^{k-1} x}{x^2}(k - \ln x)$ a tedy je klesající pro $x > e^k$. Postupným aplikováním L'Hospitalova pravidla typu „∞/∞“ není těžké ukázat, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (zkuste si to). Pro posloupnost $b_n := \frac{\ln^k n}{n}$ tedy platí $b_n \searrow 0$ (monotonie pro indexy $n > e^k$), a lze opět použít Abel-Dirichletovo kritérium.

Cvičení k příkladu 4.

Řešení: $\ln a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{n\,a^n}$, $a > \frac{1}{2}$ (kde se vzala to polovina?). Pro numerické výpočty si uvědomte, že čím větší a, tím hůře bude řada konvergovat — všímejte si například vztahu mezi čitateli a jmenovateli u řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ pro $a = 2$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n\,8^n}$ pro $a = 8$. Proto je lepší například $\ln 8$ počítat jako $3 \ln 2$. Až nebudete mít po večerech co dělat, zkuste si sečtením prvních několika členů uvedených řad přibližně spočíst nějaké ty logaritmy.