4. DUÁLNOST

4.1. Duál a dualita

Def: X Banachův, $X' := \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$) nazveme (topologickým) duálem k X.

Pozn:
- X' jsou tedy spojité lineární funkcionály, spojitost ve smyslu
$$x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow Tx_n \to Tx \quad (\text{pro } T\in X')$$
- Víme, že $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův, pokud Y je Banachův, tedy i X' je Banachův, $\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |Tx|$
- neplést s vektorovým duálem (pouze lineární zobrazení $X \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) – nevyžaduji spojitost). Tj prvků vektorového duálu je víc (o ty „nespojité"). V konečné dimenzi pro X Banachův je vektorový duál = topologický duál.

Def. Dualitou nazveme zobrazení $S : X \times X' \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), které je
a) bilineární (tj lineární v každé složce) *)
b) spojité (tj $(x_n,y_n) \xrightarrow{X\times X'} (x,y) \Rightarrow S(x_n,y_n) \to S(x,y)$)

*) v komplexním případě požadujeme místo bilinearity tzv. seskvilinearitu, $S(\alpha x+\beta y, z) = \alpha S(x,z)+\beta S(y,z)$ & $S(x,\alpha y+\beta z) = \bar\alpha S(x,y)+\bar\beta S(x,z)$.

Pozn: Někdy píšeme $S(x,T) \equiv \langle x,T\rangle$. Obecně je často $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symbolem duality.

(Př) V situacích, kdy lze rozumným způsobem ztotožnit X a X', například pro $\mathbb{R}^n$, je dualitou například skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Později uvidíme, že podobně lze uvažovat i v jakémkoli Hilbertově prostoru. V tomto smyslu je dualita zobecněním skalárního součinu.

Pozn: Pojem ztotožnění prvků duálu (což jsou zobrazení) s prvky nějakého jednoduššího prostoru se v matematice používá poměrně často, ve smyslu reprezentace prvků duálu.
Můžeme se tak například ptát, co znamená často vídaná rovnost

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n \text{ omezená, otevřená}, \quad p,q\in(1,\infty), \quad \tfrac1p+\tfrac1q=1$$

Když prvky jsou ztotožnění s $(L^p(\Omega))'$ a prostor funkce.
Znamená to přesně tohle:

$\forall T \in (L^p(\Omega))' \ \exists!\ g \in L^q(\Omega)$, že

a) $T(f) = \int_\Omega f \bar{g} \quad \forall f \in L^p(\Omega)$

b) $\|T\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}$

V tomto smyslu pak ztotožňujeme T a g, $(L^p)'$ a L^q
a dualitu
$$\langle f, T\rangle \longmapsto T(f)$$
ztotožníme s dualitou
$$\langle f, g\rangle \longmapsto \int_\Omega f \bar{g} \qquad f \in L^p,\ g \in L^q \qquad (D)$$

Vidíme skutečně, že pro $p=2$ dostáváme $q=2$ a dualita (D) má tvar skalárního součinu na $L^2(\Omega)$, $\langle f, g\rangle \equiv (f,g)_{L^2}$.

Otázka: Je to jen specialita $L^2(\Omega)$ nebo něco hlubšího?
Odpověď: Je to něco hlubšího:

Věta (Riesz - Fréchet) [viz Lukeš 2.9]
Buď H Hilbertův prostor, $(\cdot,\cdot)_H$ buď skalární součin v H.
Potom $\forall T \in H' \ \exists!\ f \in H$, že

a) $T(x) = (x, f)_H \quad \forall x \in H$

b) $\|T\|_{H'} = \|f\|_H$

Pozn: • Opět ztotožňujeme $H' \cong H$ a ztotožňujeme T a f.
↳ isometrický isomorfismus
↓ zachovává normu
↓ bijekce

Pozn.: • V komplexní verzi v bodě a) by vypadalo takto: mělo by být i to, že $\forall T \in H' \; \exists! \, g \in H$

$$T(x) = (g, x)_H \quad \forall x \in H.$$

Skutečně: položme $S(x) = \overline{T(x)}$, pak podle R.-F. věty nalezneme $g \in H$

$$S(x) = (x, g)_H ;$$

Ale $T(x) = \overline{S(x)} = \overline{(x,g)} = (g, x)$.

Pozn.: Pro X, Y Banachovy máme:

$$\boxed{X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'} \qquad \text{(INK)}$$

$\downarrow$

Pozor, zde jde o proces zúžení zobrazení (restrikce)

neboť $T \in Y' \Rightarrow T$ spojité a lineární (na prvcích z Y) $\overset{(X \subset Y)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow T|_X$ spojité a lineární (na prvcích z X) $\Rightarrow T \in X'$.

(Pokud se ovšem na X používá norma z Y, tj. norma na X je „zděděná" z Y).

POZOR!! Bezhlavá aplikace předchozích tvrzení nás může zavést do slepých uliček:

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{R}^2)' \subset \mathbb{R}'$ dle předch. pravidla

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)' & \subset & \mathbb{R}' \\ \| & & \| \\ \mathbb{R}^2 & \subset & \mathbb{R} \end{array}$$

$\underline{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}}$, neboť oba jsou Hilbertovy

Kde je chyba?. :)

Odpověď: chyby jsou zde dvě, malá a velká:

a) malá: $(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n$ není úplně přesná rovnost, ale ztotožnění

každé lineární zobrazení na $\mathbb{R}^n$ má tvar

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$ a ztotožňuje se s n-ticí

koeficientů

$$T \approx (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \; \dots \text{ reprezentuje } (\mathbb{R}^n)'.$$

Ono reprezentující $\mathbb{R}^n$ tedy je třeba nahlížet opravdu jako prostor prvků, které reprezentují lin. zobrazení.

b) Velká: Inkluze $(\mathbb{R}^2)' \subset \mathbb{R}'$, která vede až k $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$ není de facto množinovou inkluzí, ale je to tento výrok:

Všechna lineární zobrazení, pracující na $\mathbb{R}^2$, lze zúžit tak, aby pracovala na $\mathbb{R}^1$. Pokud lin. zobrazení na $\mathbb{R}^2$ jsou reprezentována dvojicí čísel (α_1, α_2), lze toto „zobrazení" skutečně zúžit např. na $(\alpha_1, 0)$, aby mohlo pracovat na $\mathbb{R}^1$. To je pravý smysl „inkluze" $Y' \subset X'$, viz (INK).

Pozn.: „Duálnost" se často projevuje i tím, že „vzorce, obsahující prostory X a X' vykazují jisté symetrie.

Př.:

Víme: $$\boxed{\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |T(x)|} \qquad (N)$$

Dále víme

$$|T(x)| \le \|T\| \cdot \|x\| \text{ ; pokud nyní zvážíme } \|T\| \le 1$$

dostaneme

$$|T(x)| \le \|x\| \qquad \forall \|T\| \le 1 \qquad \Big/ \sup_{\|T\| \le 1}$$

$$\sup_{\|T\| \le 1} |T(x)| \le \|x\|$$

Současně platí tzv. Hahn-Banachova věta [Taylor, str. 181]

X Banachův, $0 \ne x \in X$
$\Rightarrow \exists T \in X'$, $\|T\| = 1$, $T(x) = \|x\|$.

H-B. $\Rightarrow \|x\| \le \sup_{\|T\| \le 1} |T(x)|$

Celkově $$\boxed{\|x\|_X = \sup_{\|T\|_{X'} \le 1} |T(x)|} \qquad (N')$$

(srov. s (N))

$\boxed{4.2}$ Duální zobrazení, duální operátor

Def. Mějme X, Y Banachovy, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Řekneme, že T' je duální zobrazení k T, pokud:

a) $T' : Y' \to X'$ (tedy jde o zobrazení mezi zobrazeními)

b) $T' \circ y' = y' \circ T \quad \forall y' \in Y'$, tedy:

$$\underset{\underset{X'}{\cap}}{(T'y')}(\underset{\underset{X}{\cap}}{x}) = \underset{\underset{Y'}{\cap}}{y'}(\underset{\underset{Y}{\cap}}{Tx}) \qquad \forall y' \in Y', \ \forall x \in X \qquad \text{(DZ)}$$

Pozn.: $y' \in Y'$ je zobrazení pracující na Y $\Rightarrow$ $T'y' \in X'$ je zobrazení pracující na X $\Rightarrow$ $(\underset{\underset{X'}{\cap}}{T'y'})(\underset{\underset{X}{\cap}}{x})$ je objekt, přiřazující prvkům z $X \times X'$ číslo, což odpovídá struktuře duality. (DZ) proto často zapisujeme takto:
(s využitím symbolu pro dualitu)

$$\underbrace{\langle T'y', x \rangle}_{\text{zobrazení na } X' \times X} = \underbrace{\langle y', Tx \rangle}_{\text{zobrazení na } Y' \times Y} \qquad \text{(DZ.2)}$$

symbol duality

Někdy se zápisu (DZ.2) říká „přehození T do druhé složky".

Pozn.: • Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak i $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Linearita je jasná a spojitost plyne takto: $y_n' \to y' \overset{?}{\Rightarrow} T'y_n' \to T'y'$. Ale:

$$\|T'y_n' - T'y'\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T'y_n'(x) - T'y'(x)\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|y_n'(Tx) - y'(Tx)\|$$

$$= \sup_{\|x\| \le 1} \|(y_n' - y')(Tx)\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|y_n' - y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

$$= \|y_n' - y'\| \cdot \|T\| \to 0$$

• Platí: $\|T'\| = \|T\|$ (zkuste si, není to těžké)

• Platí také: $T \in \mathcal{C}(X,Y) \Rightarrow T' \in \mathcal{C}(Y', X')$ (těžší)

Otázka: Bude nás zajímat, kdy lze (podobně jako u Hilberta $H' \cong H$) ztotožnit T a T'. To obecně znamená $T' \equiv T$

zobrazuje $Y' \to X'$ — zobrazuje $X \to Y$

Tj nutnou podmínkou by bylo $y' = X$ a $X' = Y$ / '
$Y'' = X'$ a $X'' = Y'$
$\qquad\; \| \qquad\qquad \|$
$\qquad\; Y \qquad\qquad X$

Tedy něco jako $Y'' \cong Y$ a $X'' \cong X$
To by mohlo platit pro Hilb. prosty, kde je dokonce už i $X' \cong X$.

- K danému T nemusí T' vůbec existovat. Výše uvedené vlastnosti tedy platí ve smyslu „pokud T' existuje, tak má uvedené vlastnosti". Ale v Hilb. prostoru je opět vše lepší:

Věta (duální zobrazení mezi Hilb. prosty)
Buďte H_1, H_2 Hilbertovy prosty, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Potom
$\exists!$ zobrazení $T': H_2 \to H_1$ takové, že
- $(Tx, y)_{H_2} = (x, T'y)_{H_1} \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \qquad (+)$

Pro toto zobrazení pak platí:
a) $T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$
b) $\|T'\| = \|T\|$

Pozn: Pokud na (+) aplikujeme komplexní sdružení, dostaneme

$$\overline{(Tx, y)_{H_2}} = \overline{(x, T'y)_{H_1}} \Rightarrow (T'y, x)_{H_1} = (y, Tx)_{H_2}$$

což je (DZ.2).

(D). Buď $y \in H_2$ pevné, definujme $L_y: x \mapsto (Tx, y)_{H_2}$ je spojité a lin. na H_1

$$\overset{\text{Riesz-Fréchet}}{\Longrightarrow} \quad \exists!\, z \in H_1,\ (Tx, y)_{H_2} = (x, z)_{H_1} \quad \forall x \in H_1$$

$$\|z\| = \|L_y\|$$

Def: $T': \underset{H_2}{\underset{\cap}{y}} \mapsto \underset{H_1}{\underset{\cap}{z}}$. Potom $(Tx, y) = (x, T'y)$ $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ platí.

Ještě je potřeba ukázat linearitu T', spojitost T' a rovnost norem.

- Linearita: podle (DZ.2) je

$$
\begin{aligned}
(T'(\alpha y_1+\beta y_2),x) &= (\alpha y_1+\beta y_2, Tx) = \alpha(y_1,Tx)+\beta(y_2,Tx) = \\
&= \alpha(T'y_1,x)+\beta(T'y_2,x) = \\
&= (\alpha T'y_1+\beta T'y_2, x) \quad \forall x\in H_1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad T'(\alpha y_1+\beta y_2) = \alpha T'y_1+\beta T'y_2 \quad \text{cbd.}$$

- Spojitost: ukážeme omezenost normy. Předně je

$$\|T'y\| = \|z\| = \|L_y\|$$

Spočteme $\|L_y x\| = \|(Tx,y)\| \le \|Tx\|\cdot\|y\| \le \|T\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$

Proto $\underbrace{\|L_y\|}_{\|T'y\|} = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|L_y x\| \le \|T\|\cdot\|y\|$

Načež $\|T'\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|T'y\| \le \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|T\|\cdot\|y\| = \|T\|$.

Tedy $\|T'\| \le \|T\| < \infty \quad \Rightarrow \quad T'\in\mathcal{L}(H_2,H_1)$.

Zbývá: $\|T'\| = \|T\|$. Jednu nerovnost již máme, druhou dokážeme drobným trikem:

Definujme $T'' := (T')' : H_1 \to H_2$, které tedy z toho, co již máme dokázáno, splňuje: i) $T''\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$

ii) $(T''x,y) = (x,T'y) \quad \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$

iii) $\|T''\| \le \|T'\|$.

Ale z ii) plyne

$$(T''x,y) = (x,T'y) = (Tx,y) \quad \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$$

$\Rightarrow T = T''$, a iii) tedy je ona chybějící nerovnost, kterou jsme chtěli ukázat.

$\boxtimes$

Pozn: Operátor T' nazýváme <u>hermitovsky sdružený</u> s T (případně <u>adjungovaný</u> k T)

Následující definice vychází z toho, že pokud je v předchozí větě $H_1 = H_2$, máme: $T \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \exists T' \in \mathcal{L}(H)$, a tak se ptáme, kdy $T = T'$.

<u>Def.</u> Buď H Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ nazveme <u>hermitovský</u> (případně <u>samoadjungovaný</u>) pokud $T = T'$ (přičemž oba jsou definovány na celém H).

Vlastnosti samoadjungovaných operátorů

Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T' = T$. Potom

① $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H$ (zřejmý důsledek definice)

② Pokud $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. (Všechna vl. č. hermit. operátoru jsou reálná)

D. Nechť $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$

Pak $(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$

$\|$

$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$ $\Big\}$: $\|x\|^2 \neq 0$

$\Downarrow$

$\lambda = \bar{\lambda}$ cbd.

③ $\sigma_p(T) \subset \langle m(T), M(T) \rangle$, kde $m(T) = \inf\{(Tx, x), \|x\| = 1\}$
$M(T) = \sup\{(Tx, x), \|x\| = 1\}$

④ Alespoň 1 z hodnot $\|T\|$, $-\|T\|$ je vlastním číslem T, tedy platí

$$\boxed{\rho(T) = \|T\|}$$

⑤ Pokud $\lambda \neq \mu$ jsou dvě vlastní čísla T, a x, y jsou jim odpovídající vlastní vektory, pak $(x, y) = 0$, tedy $x \perp y$, kde „$\perp$" označuje <u>kolmost</u>.

D. $\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$

$$\Rightarrow (\lambda-\mu)\cdot(x,y)=0 \quad \Big| : \lambda-\mu\neq 0$$
$$\underline{(x,y)=0}\,.$$

$\boxed{4.3}$ Kompaktní samoadj. operátory na Hilbertově prostoru

Buď $T\in\mathcal{C}(H)$, T samoadjungovaný, H Hilbertův.

- Pak T má nejvýše spočetně mnoho vl. čísel, která jsou všechna reálná, leží v $\langle -\|T\|, \|T\|\rangle$; nula je jediným hrom. bodem, může a nemusí být vlastním číslem.
- Ke každému vl. číslu $\exists$ jen konečně mnoho LN vlastních vektorů. Vl. vektory, které odpovídají různým vlastním číslům, jsou kolmé.
- Základní otázka: Vezmeme-li všechny vl. vektory všech (nenulových) vl. čísel, tvoří mi bázi H? Odpověď dá tzv. Hilbert-Schmidtova věta.

Nejprve dvě intermezza:

(I) Direktní součet podprostorů

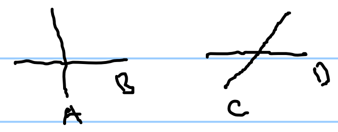
Def: H lineární vektorový prostor, A, B lin. podprostory H.

Řekneme, že $A\oplus B = H$ (direktní součet A,B), pokud:

1) $A+B=H$, tj. $\forall h\in H\ \exists a\in A\ \exists b\in B,\ a+b=h$
2) $A\cap B=\{0\}$

Př. $\underbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}=\mathbb{R}^2}$; $\mathbb{R}^2+\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

nemusí být určeno jednoznačně



$A\oplus B = C\oplus D = \mathbb{R}^2$

Chtěli bychom, že něco jako „nekolmost" C a D zde vadí.

→ Nyní buď A uzavřený lin. podprostor v Hilbertově prostoru H.

Definujeme $A^\perp := \{y\in H,\ (x,y)=0\ \forall x\in A\}$

Potom: a) $A^\perp$ je lineární (zřejmé)

b) $A^\perp$ je uzavřený: $\underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y_n)}} \to \underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y)}}$ spojitost sk. součinu

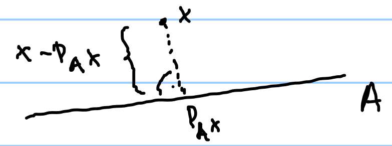
c) $(A^\perp)^\perp = A$ (D.CV.)

Tvrzím: $A \oplus A^\perp = H$

Nejlépe nahlédnout v kontextu tzv. lemmatu o kolmé projekci v H: | A uz.-lin. podprostor v H

Pak $\forall x \in H \setminus A\ \exists P_A x \in A$, $x - P_A x \perp y\ \ \forall y \in A$

tj. $x - P_A x \in A^\perp$.



Nyní naše tvrzení plyne snadno

- $x \in A \Rightarrow x = x + 0$;
- $x \in H \setminus A \Rightarrow x - P_A x \in A^\perp$; a přitom $x = \underbrace{(x - P_A x)}_{\in A^\perp} + \underbrace{P_A x}_{\in A}$
- $v \in A \cap A^\perp \Rightarrow (\underset{A}{\underset{\in}{v}}, \underset{A^\perp}{\underset{\in}{v}}) = 0$ atd.

(II) Připomenutí teorie Fourierových řad v H.

Platí: Je-li H Hilbertův prostor, pak jsou ekvivalentní:

(i) H je separabilní

(ii) $\exists$ spočetná úplná OG báze $\{e_n\}$ v H

(iii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad \forall x \in H$

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} \quad \forall x \in H$ (Parsevalova rovnost)

Pozn.:
- separabilita = existuje spočetná hustá podmnožina H
  (v neseparabilním prostoru ani nelze čekat existenci úplné spočetné báze)
- „úplnost" v bodě (ii) chápeme takto:
  $\{e_n\}$ je úplná OG báze v H $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(y, e_n) = 0\ \forall n \Rightarrow y = 0$
  (tj. neexistuje už žádný další nenulový vektor, který by byl kolmý na všechny prvky e_n)
- (iii) je tvrzení o tom, že každý prvek H je roven součtu své Fourierovy řady
- (iv) je zobecnění Pythagorovy věty do H.

Věta (Hilbert - Schmidt)

H Hilbertův, $T \in \mathcal{C}(H)$, T samoadjungovaný,
Λ = uzavřený lin. podprostor H, generovaný všemi vl. vektory T, které odpovídají všem nenulovým vl. číslům T

Potom:
$$H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T.$$

D) T kompaktní, hermitovský $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$, nenulová vl. čísla T
$$E_j = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I) = \{x \in H,\ x \neq 0;\ Tx = \lambda_j x\},\ j = 1, 2, \dots$$
víme $\dim E_j = n_j < \infty$

Buď nyní B_j ... OG báze E_j, složená z vl. vektorů, odpovídajících vl. č. λ_j; $|B_j| = n_j$.

Lze vždy zařídit pomocí Gramm-Schmidtova OG procesu.

$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ ... nejvýše spočetná množina vl. vektorů T.

Pokud $x, y \in B$, $x \neq y$:
- x, y jsou příslušné stejnému vl. č. λ_j $\Rightarrow \exists j,\ x, y \in B_j \Rightarrow x \perp y$
- x, y jsou příslušné různým vl. č. $\Rightarrow x \perp y$ (z vlastností samoadj. operátoru)

$\Rightarrow$ $\underline{B \text{ je OG}}$, $B = \{e_1, e_2, \dots\}$

Def: $\Lambda := \overline{\operatorname{Lin}(B)}$:
- Λ je lineární podprostor H (uzávěr lin. podprostoru je lin. podprostor)
- Λ je uzavřený $\Rightarrow$ Λ Hilbertův

Speciálně víme: $x \in \Lambda \Rightarrow \exists\, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n$ (*)

- Λ je separabilní: množina
$\left\{ \sum_{1}^{N} (r_n + i q_n) e_n,\ e_n \in B,\ r_n, q_n \in \mathbb{Q},\ N \in \mathbb{N} \right\}$ je spočetná a hustá v Λ.

Tím jsme popsali „separabilní kus H, generovaný nenulovými vl. čísly T".
Otázka: Kolik toho ještě zbývá do celého H?

Ukažme postupně

Ⓐ $\boxed{T\Lambda \subset \Lambda}$

$$x \in \Lambda : \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{spoj.}}}{Tx = T}\Big(\underbrace{\sum_n^\infty \gamma_n e_n}_{\text{konverg.}}\Big) = \sum_n^\infty \gamma_n Te_n = \sum_n^\infty \underbrace{\gamma_n \lambda_n}_{\in \mathbb{C}} e_n \in \Lambda$$

předp. konvergence

ale to je pravda, neboť víme, že součet této řady je roven Tx.

Ⓑ Uvažujme $\Lambda^\perp$; ukážeme $\boxed{T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp}$

$$\left.\begin{array}{l} y \in \Lambda^\perp \\ x \in \Lambda \text{ lib.} \end{array}\right\} \quad (Ty, x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{samoadj.}}}{(y, Tx)} \overset{\Lambda^\perp\ \Lambda\ (z\ \text{Ⓐ})}{=} 0 \quad \forall x \in \Lambda \Rightarrow Ty \in \Lambda^\perp.$$

Ⓒ Ukážeme dokonce $\boxed{T\Lambda^\perp = \{0\}}$

$\Lambda^\perp$ je také uzavř. podprostor $\mathcal{H} \Rightarrow \Lambda^\perp$ je Hilbertův

def $\tilde{T} := T\big|_{\Lambda^\perp}$. Protože je $T(\Lambda^\perp) \subset \Lambda^\perp$, je $\tilde{T} : \Lambda^\perp \to \Lambda^\perp$ a kompaktnost a samoadj. se zachová.

(důležité je $T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp$, a na $\Lambda^\perp$ je $T = \tilde{T}$)

Ukážeme, že $\tilde{T}$ nemá žádné nenulové vl. č. Nechť ano:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \neq 0 \text{ vl. č. } \tilde{T} \Rightarrow \exists\, y \neq 0,\ y \in \Lambda^\perp \\ \tilde{T}y = \lambda y \end{array}\right\} \text{ spor.}$$

ale $\tilde{T}y = Ty = \lambda y \Rightarrow \lambda$ je vl. č. $T \Rightarrow y \in \Lambda$

Tedy $\tilde{T}$ nemá nenulové vl. č., a protože je kompaktní, je $\sigma(\tilde{T}) \subset \{0\}$.

$$\Rightarrow \rho(\tilde{T}) = 0 \Rightarrow \|\tilde{T}\| = 0 \Rightarrow \underset{T|_{\Lambda^\perp}}{\tilde{T}} = 0 \Rightarrow T\big|_{\Lambda^\perp} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{T(\Lambda^\perp) = \{0\}}$$

• tedy $\Lambda^\perp \subset \ker T$

Ale obecně je $\Lambda \oplus \Lambda^\perp = H$ $\Big\} \Rightarrow \Lambda + \ker T = H$

(ještě nemusí být direktní)

↓

(viz $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$)

Stačí ukázat $\Lambda \cap \ker T = \{0\}$.

Buď $z \in \Lambda \cap \ker T$

$z \in \Lambda \Rightarrow z = \sum_m \beta_m e_m \quad / T$

$0 = Tz = \sum \beta_m T e_m = \sum \beta_m \lambda_m e_m \overset{\text{jednozn. F. ř.}}{\Rightarrow} \beta_m \lambda_m = 0 \quad \forall m$

$\lambda_m \neq 0 \Rightarrow \beta_m = 0 \quad \forall m$

$\Rightarrow z = \sum \beta_m e_m = 0$ cbd ☒

Pozn.: • $\ker T = \{0\} \Rightarrow H = \Lambda$, tj. H je separabilní.

Pozn.: • V důkazu nám stačilo $\Lambda^\perp \subset \ker T$, lze dokázat dokonce $\boxed{\Lambda^\perp = \ker T}$: Stačí ukázat $\ker T \subset \Lambda^\perp$. Vezmi $z \in \ker T$, pak tedy $Tz = 0$, proto je $\forall m$: $0 = (Tz, e_m) = (z, Te_m) = (z, \lambda_m e_m) = \lambda_m (z, e_m) \Rightarrow (z, e_m) = 0 \ \forall m$; ($\lambda_m \neq 0$) Nyní pro $x \in \Lambda$, $x = \sum \alpha_m e_m$, $(z, x) = \sum \alpha_m (z, e_m) = 0 \Rightarrow z \in \Lambda^\perp$

Důsledek: V uvedené situaci tedy platí:

T je kompaktní samoadjungovaný na H, $\{e_m\}$ je OG množina všech vl. vektorů, příslušných všem nenulovým vl. číslům λ_m $\Big\} \Rightarrow \forall h \in H \ \exists \alpha_m \in \mathbb{C}$, $\exists z \in \ker T$, že

$$h = \sum_m \alpha_m e_m + z \qquad / T \qquad (*)$$

$$Th = \sum \alpha_m T e_m + \underbrace{Tz}_{0}$$

$$\boxed{Th = \sum \alpha_m \lambda_m e_m}$$ tj. $T(H) \subset \Lambda$

(*) násob $(\cdot, e_k)$ $\Rightarrow$ $(h, e_k) = \sum \alpha_m \underbrace{(e_m, e_k)}_{\delta_{mk} \|e_m\|^2} + \underbrace{(z, e_k)}_{0 \text{ neb } \Lambda^\perp = \ker T}$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{(h, e_k)}{\|e_k\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sum_n \frac{(h, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n + z \,, \quad Tz = 0} \qquad (1)$$

$$\boxed{Th = \sum_n \lambda_n \frac{(h, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n} \qquad (2)$$

*)

Věta Buď $\{e_n\}$ úplná ON báze v separabilním Hilb. prostoru. Buďte $\alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $M := \sup\{|\alpha_n|\} < \infty$.
Definujme
$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (h, e_n) e_n \,, \text{ pokud suma konverguje.} \quad (+)$$
Potom
1) Suma napravo v (+) vždy konverguje, $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| = M$
2) T samoadjungovaný $\Leftrightarrow \alpha_n \in \mathbb{R}$
3) $T \in \mathcal{C}(H) \Leftrightarrow \exists$ přerovnání α_n, že $\lim \alpha_n = 0$

Pozn.:
- $\alpha_n = 1 \quad \forall n$: $\quad Th = h$ (F. řada) $\Rightarrow T$ identita
 (dle 2), 3) není kompaktní, je samoadj.)
- $\alpha_n = \frac{1}{n}$: definuje samoadj., komp. operátor. Atd..

$\overline{\overline{=}}$

*) Pozn.: 1) a 2) připomínají Fourierovu řadu, v 1) je však prvek z navíc. Pokud $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, je i $z = 0$ a 1) má tvar obvyklé F. řady v úplné bázi $\{e_n\}$. Výhoda 2) je v tom, že se tam již prvek z neuplatňuje, bez ohledu na strukturu $\operatorname{Ker} T$.