P 12, 18.5.2021

- $L^2_\rho(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{C},\ \int_a^b \rho |f|^2 < \infty \}$

  $-\infty \le a < b \le +\infty$

- ρ .... váha

  $\rho > 0, \quad \int_a^b \rho < \infty, \quad (\rho \in C)$

- $(f,g)_{2,\rho} = \int_a^b \rho f \bar{g} \Rightarrow \|f\|^2_{2,\rho} = \int_a^b \rho |f|^2$

  Hilbertův

- $Ty = \lambda \rho y$ vl. č. + vl. fce s vahou

  $y \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$

- T aspoň symetrický, tj. $(Tf,g) = (f,Tg)$

  → • $\lambda \in \mathbb{R}$

  → • $\lambda \neq \mu$ vl. č., f a g vl. fce s vahou

  $\Downarrow$

  $(f,g)_{2,\rho} = 0$

  ⟿ OG systém

Věta $L^2_\rho(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, ρ váha (vše jako výše), ρ takové, aby

$\|P\|_{2,\rho} < \infty$ $\forall P$ polynom.

Buď $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ systém reálných OG polynomů v L^2_ρ, st $\varphi_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$, že

$$\boxed{x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}}$$

D. st $(x\varphi_n) = n+1 \Rightarrow \exists \gamma_{n,k} \in \mathbb{R}$

$$x\varphi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k}\varphi_k \quad (*)$$

(OBECNĚ) / $(\cdot, \varphi_j)_{2,\rho}$ $\forall j = 0, 1, 2, \dots$

POZN: $\varphi_0 = 1$

$\varphi_1 = 3x + 2$

$\varphi_2 = x^2 - 2x + 1$

Jedy'koli: $3x^2 + 3x - 5$

$$3x^2+3x-5 = 3\underbrace{(x^2-2x+1)}_{\varphi_2} + 3\underbrace{(3x+2)}_{\varphi_1} - 12\varphi_0$$

$$= 3\varphi_2 + 3\varphi_1 - 12\varphi_0$$

$$(x\varphi_n, \varphi_j) = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k} \underbrace{(\varphi_k, \varphi_j)}_{OG \;\dots\; = \delta_{jk} \|\varphi_k\|^2_{2,\rho}}$$

$$\int \rho x \varphi_n \varphi_j = \underbrace{\gamma_{n,j} \|\varphi_j\|^2_{2,\rho}}_{} \quad \dots \quad j \le n+1$$

$$= 0 \quad \text{pro } j > n+1 \qquad (\bullet)$$

$$= (\varphi_n, x\varphi_j) = \left(\varphi_n, \sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} \varphi_p\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} (\varphi_n, \varphi_p)}_{= 0 \;\; \forall n > j+1} \qquad (+)$$

$$(\bullet\bullet)$$

Přitom: onen poslední výraz (+) je

stále roven $\gamma_{n,j} \|\varphi_j\|^2_{2,\rho}$

a přitom $= 0$ $\begin{cases} j > n+1 & \text{(ad •)} \\ j < n-1 & \text{(ad ••)} \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma_{n,j} = 0 \quad \forall j > n+1 \quad \forall j < n-1$

$\Rightarrow \underline{\gamma_{n,j} \neq 0 \text{ pouze pro } j = n-1, n, n+1}$

Vraťme se k $(*)$

$$x\varphi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k} \varphi_k$$

$$x\varphi_n = \underbrace{\gamma_{n,n-1}}_{B_n} \varphi_{n-1} + \underbrace{\gamma_{n,n}}_{C_n} \varphi_n + \underbrace{\gamma_{n,n+1}}_{A_n} \varphi_{n+1}$$

tzn.:

$$\boxed{x\varphi_n = A_n \varphi_{n+1} + C_n \varphi_n + B_n \varphi_{n-1}}$$

$\boxtimes$

Poznámky:

(1) Lze ukázat: • $a = -b$

• ρ sudá na (a,b)

$$\Rightarrow C_n = 0 \quad \forall n$$

(2) Přitom $A_n \neq 0$, $B_n \neq 0$

(3) Rekurentní vzorec pro normy φ_n:

$$x\varphi_n = A_n \varphi_{n+1} + C_n \varphi_n + B_n \varphi_{n-1}$$

a) násob: $(\cdot, \varphi_{n+1})$

$$\Rightarrow (x\varphi_n, \varphi_{n+1}) = A_n \|\varphi_{n+1}\|^2$$

b) násob: $(\cdot, \varphi_{n-1})$

$$\Rightarrow (x\varphi_n, \varphi_{n-1}) = B_n \|\varphi_{n-1}\|^2$$

$$\|$$

$$(x\varphi_{n-1}, \varphi_n) = A_{n-1} \|\varphi_n\|^2$$

$$\Rightarrow B_n \|\varphi_{n-1}\|^2 = A_n \|\varphi_n\|^2$$

$\Rightarrow$ protože $A_n \neq 0 \ \forall n$ (kvůli stupni)

a $\|\varphi_{n-1}\|^2 \neq 0$, $\|\varphi_n\|^2 \neq 0$

$$\Rightarrow B_n \neq 0 \ \forall n$$

Za druhé:

$$\boxed{\|\varphi_{n+1}\|^2 = \frac{B_{n+1}}{A_n} \|\varphi_n\|}$$

6.3. Gaussova redukovaná rovnice

Uvažujme GRR:

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0 ,$$

LIN. ROV.

s nekonst. koef.

- $x \neq 0$ (jinak degeneruje)
- $s, \alpha \in \mathbb{C}$

UVIDÍME: $s \neq -1, -2, -3, \dots$

1. Ukážeme: Rovnice GRR lze přepsat do tvaru

$$Ty = \lambda \rho y \qquad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C}$$

s vhodnou ρ

přičemž T je ve tvaru diferenciálního výrazu v samoadj. tvaru, tj. $Ty = (-py')'$, $p \neq 0$

$$\Rightarrow \quad (-py')' = \lambda \rho y \qquad p, \rho \text{ hledáme}$$

$$-p'y' - py'' - \lambda \rho y = 0 \qquad / : (-p) \neq 0$$

$$y'' + \frac{p'}{p} y' + \lambda \frac{\rho}{p} y = 0$$

Srov.

$$xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y = 0, \qquad / : x \neq 0$$

$$y'' + \left(\frac{s+1}{x} - 1\right) y' - \alpha \frac{1}{x} y = 0$$

Nutně:

$$\frac{p'}{p} = \frac{s+1}{x} - 1 \qquad \frac{\rho}{p} = \frac{1}{x} \qquad \lambda = -\alpha$$

$$(\ln|p|)' = (s+1)(\ln|x|)' - 1$$

$$|p| = |x|^{s+1} e^{-x} \cdot K \qquad (K=1 \text{ BÚNO})$$

Odtud $\boxed{x>0}$

$$\underline{p(x) = x^{s+1} e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \underline{\rho(x) = x^{s} e^{-x}}$$

$$\underline{\lambda = -\alpha}$$

Vidíme: pro $x>0$ lze psát GRR:

$$\underbrace{\Big(-\underbrace{x^{s+1}e^{-x}}_{p}\,y'\Big)'}_{Ty} = -\alpha \underbrace{x^{s}e^{-x}}_{\rho}\, y$$

Řešení GRR jsou vl. fcemi T s vahou $\rho = x^s e^{-x}$ ($x \in (0,\infty)$), odpovídající vl. č. $(-\alpha)$, kt. mají $\underline{L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)}$

⇒ ROVNICE (= OPERÁTOR T) NÁM ŘEKLA, NA JAKÉM PROSTORU (SPEC. S JAKOU VAHOU) BUDOU BUDOUCÍ VL. FCE KOLMÉ.

(2) Hledejme řešení GRR ve tvaru Tayl. řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \approx y$

- $x \neq 0 \Rightarrow$ GRR $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Předpokládáme, že tak řešení půjdou „slepit" v nule (hodnoty i 1. a 2. derivace)

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0$$

Dosadíme $y = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n$? c_n hledáme

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) \underbrace{x^{n-2} \cdot x}_{x^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (s+1) c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n x^n = 0$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)\,n\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(s+1)c_{n+1}(n+1)\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n x^n = 0\right.$$

Srov koef: x^0 : $\quad (s+1)c_1 = \alpha c_0$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_0 \frac{\alpha}{s+1}$$

$$\boxed{s \neq -1}$$

$n \geq 1$: x^n :

$$c_{n+1}\left[(n+1)n + (s+1)(n+1)\right] = c_n(n+\alpha)$$

$$c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\boxed{s \neq -2, -3, -4, \ldots}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)}} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \quad s \neq -1, -2, -3 \ldots$$

BÚNO $\quad \boxed{c_0 = 1}$

Konverguje tato Tayl. řada? kde?

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$R = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = +\infty$$

Dokonce $y \in C^{\infty}(-\infty,\infty)$

$$\left[\ y \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\ \right]$$

———x

DOKONČENÍ PŘÍŠTĚ