P 10, 4.5.2021

T neomezený, lineární
‖
nespojitý

$D(T) \rightsquigarrow D(T^*) \rightsquigarrow T^*$

samoadj.: • $D(T) = D(T^*)$
• $T = T^*$

• $D(T) \subsetneq H$
$\overline{D(T)} = H$

• T symetrický: $(Tx, y) = (x, Ty)$ $\forall x, y \in H$
⇕
$D(T) \subseteq D(T^*)$
$T = T^*$ na $D(T)$

• T samoadj. $\Rightarrow$ T symetrický
$\not\Leftarrow$
⇓

• $\boxed{T \text{ není symetrický} \Rightarrow T \text{ není samoadj.}}$

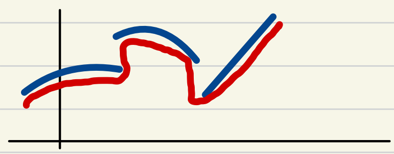
= konec opak.

Př: $H = L^2(0,1)$ $\quad f,g \in H$

$$\Rightarrow \quad (f,g)_2 = \int_0^1 f\bar{g}$$

$$D(T) = C^1([0,1]) \subset H$$

$$\overline{C^1([0,1])} = H \qquad \text{Pozn.: } \overline{C^k([0,1])} = H$$



$Tf = f'$ lin., neomezený

Pro zkoumání eventuální samoadjungovanosti budeme nejprve ohmatat symetrii:

$$(Tf,g) = \int_0^1 f'\bar{g}$$

$$(f,Tg) = \int_0^1 f\bar{g}'$$

$$\int_0^1 f'\bar{g} \overset{\text{p.p.}}{=} \underbrace{[f\bar{g}]_0^1}_{\times} - \underbrace{\int_0^1 f\bar{g}' \overset{?}{=} \int_0^1 f\bar{g}'}$$

VYPADNE, pokud by $D(T) = C^1[0,1] \cap \{f(0) = f(1) = 0\}$

ale ani to nezachrání symetrii

$\Rightarrow$ $Tf = f'$ není symetrický, a tudíž ani samoadjungovaný.

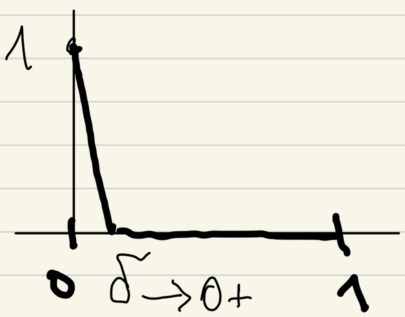
[Pozn.: $-\operatorname{div}(\nabla u) = -\Delta u$]

Z určitých důvodů: spočteme $D(T^*)$

$$D(T^*) = \Big\{ g \in C^1[0,1],\ \exists!\, h^* \in L^2(0,1),\ \underbrace{(Tf, g) = (f, h^*)}\ \ \forall f \in C^1([0,1]) \Big\}$$

$$(*) \qquad [f\bar{g}]_0^1 - \int_0^1 f\bar{g}' = \int_0^1 f\bar{h}^* \qquad \forall f \in C^1[0,1]$$

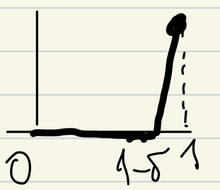
• Volme speciální f:



ve (*): $\delta \to 0+$: $\bar{g}(0) - 0 = 0$

$\underline{g(0) = 0}$

• Druhá spec. volba:



$\delta \to 0+$

$\Rightarrow \underline{g(1) = 0}$

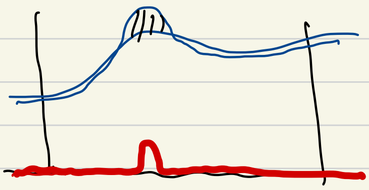
První typ:

$$\mathcal{D}(T^*) = \{ g \in \mathcal{C}^1[0,1],\ g(0) = g(1) = 0 \}$$

Potom (*) $\Rightarrow$

$$-\int_0^1 f \bar{g}' = \int_0^1 f \bar{h}^* \quad \forall f \in \mathcal{C}^1[0,1]$$

$$\int_0^1 f\left(\overline{g' + h^*}\right) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^1[0,1]$$



$$\Downarrow$$

$$h^* = -g'$$

$\Rightarrow$ k takovému $g \in \mathcal{D}(T^*)$ jsme našli $h^* = -g'$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}(T^*) = \{ g \in \mathcal{C}^1[0,1],\ g(0) = g(1) = 0 \} \\ T^* g = -g' \end{array} \right.$$

Srov. $\left| \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) = \mathcal{C}^1[0,1] \\ Tf = f' \end{array} \right.$

Tip: $\left| \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) = \{g \in C^1[0,1],\ g(0) = g(1)\} \\ Tf = if' \end{array} \right.$

$\mathcal{D}(T^*)$ ... ověřte. $= \{g \in C^1[0,1],\ g(0) = g(1)\}$

$$(Tf, g) = (f, h^*) \qquad f \in \mathcal{D}(T),\ g \in \mathcal{D}(T^*)$$

$$\int_0^1 i f' \bar{g} = \int_0^1 f \overline{h^*}$$

$$\underbrace{[i f \bar{g}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 i f \bar{g}' = \int_0^1 f \overline{h^*}$$

$$\int_0^1 f \left(\overline{h^* - i g'} \right) = 0$$

$$h^* - i g' = 0$$

$$h^* = i g'$$

$$\underline{T^* g = i g' = Tg}$$

Doplňkové cvičení: $H = L^2(0,1)$

a) $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{C}^1[0,1]$

b) $\mathcal{D}(T_2) = \{g \in \mathcal{C}^1[0,1];\ g(0) = g(1)\}$

c) $\mathcal{D}(T_3) = \{g \in \mathcal{C}^1[0,1];\ g(0) = g(1) = 0\}$

$T_1 f = i f'$ na $\mathcal{D}(T_1)$

$T_2 f = i f'$ na $\mathcal{D}(T_2)$

$T_3 f = i f'$ na $\mathcal{D}(T_3)$

Vyjde: • $\mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(T_3) \subsetneqq \mathcal{D}(T_1)$

T_1 není symetrický

• $\mathcal{D}(T_2^*) = \mathcal{D}(T_2)$ T_2 samoadj.

• $\mathcal{D}(T_3^*) = \mathcal{D}(T_1) \supsetneqq \mathcal{D}(T_3)$

vyjde T_3 je sym.

není samoadj.

5.2. Spektrum neom. operátorů

Pozn.: je T pouze symetrický?: $(Tx,y) = (x,Ty)$

je T dokonce samoadj.: $T = T^*$
$D(T) = D(T^*)$

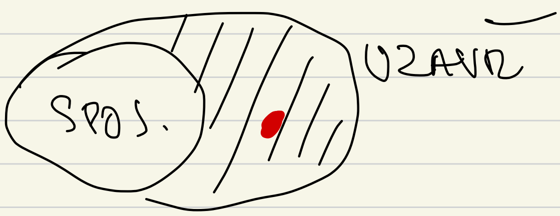
Cíl: T - samoadjungovaný
- ~~kompaktní~~ ⇝ $\boxed{\text{UZAVŘENÝ}}$

Def: $D(T) \subsetneq H$; $T: D(T) \to H$ neom.

je uzavřený, pokud:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in H \\ Tx_n \to g \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in D(T) \\ Tx = g \end{array}$$

Spojitý: $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

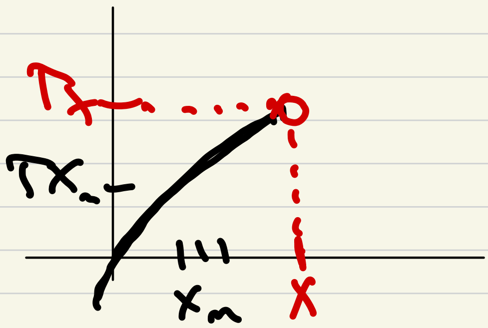


Jinak řečeno: T má uzavřený graf

$$[x_n, Tx_n] \longrightarrow [x, y]$$

$$\Rightarrow \quad y = Tx$$

$$[x, Tx] \in \text{graf}.$$



Př. „ilustrační"

$$X = C[0,1], \quad D(T) = \{f \in X;\ f' \in X\}$$

$$\cap\, L^2$$

$Tf = f'$ není spojitý

$$\{f_n\} \subset D(T) \qquad f_n \xrightarrow{X} f$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\|f_n' - g\|_\infty \to 0$$

$$f_n' \xrightarrow{X} g$$

stejnoměrná konvergence

$$\Rightarrow \quad g = f' = Tf$$

T je uzavřený

Připomenu: v případě omez. oper. jsme studovali:

$$\boxed{\text{PROSTOTA}, \text{ „NA"}, \text{ SPOJITOST INVERZE}}$$

Věta Buď T je hustě definovaný neomezený lin. oper na Hilb. pr. H. Potom:

- $Q(T) = H \Rightarrow$ T je prostý, (na), T^{-1} je spojitý, T je samoadjung.
- T^{-1} je spojitý $\Leftarrow\Rightarrow$ T prostý a na, & uzavřený

Def: RESOLVENTA T $:= \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I$ je prostý, na, spoj. inverze$\}$

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \text{RESOLVENTA}(T)$$

spektrum: vl. čísla / zbytek

Vl. čísla (bodové spektrum)

$$\{\lambda \in \mathbb{C},\ \exists x \neq 0,\ Tx = \lambda x\}$$

Pozn.: $\sigma(T)$ neomezeného oper. je typicky neomezená množina $\mathbb{C}$

Vlastnosti spektra neomezených operátorů

(předpoklad jako v předch. větě)

1) T uzavřený $\Rightarrow$ $\sigma(T)$ je uzavřená v $\mathbb{C}$

2) T uzavřený a symetrický, pak nastane právě jedna z násl. situací:

a) $\sigma(T) = \mathbb{C}$

b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$

c) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$

$\Longleftrightarrow$ T symetrický není samoadj.

d) $\sigma(T)$ = uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ T je samoadj.