P 8, 20.4.2021.

Věta (duální zobrazení mezi Hilbert. prostory)

Buďte H_1, H_2 Hilbertovy prostory, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.
Potom $\exists!\, T' : H_2 \to H_1$, že

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T'y)_{H_1} \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

Pro toto zobrazení potom platí:

a) $T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$

b) $\|T\| = \|T'\|$

Def: Buď H Hilbertův, $T \in \mathcal{L}(H)$, potom $\exists!\, T' \in \mathcal{L}(H)$. Pokud $T = T'$, tak takové T nazveme samoadjungovaným (nebo též hermitovským).

Potom:

$$\boxed{(Tx, y) = (x, Ty)}$$

Vlastnosti samoadjungovaných operátorov na H

Buď $T \in \mathcal{L}(H)$, samoadj. ($T = T^*$). Potom

(1) $$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H$$

(2) Pokud $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(D) Nech $x \neq 0$, $Tx = \lambda x \quad / \, (\cdot, x)$

$$(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2$$

$$\|$$

$$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

$$/ : \|x\| \neq 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) $\sigma_p(T) \subseteq \langle m(T), M(T) \rangle$, kde

$$m(T) = \inf \{ (Tx, x), \|x\| = 1 \}$$

$$M(T) = \sup \{ (Tx, x), \|x\| = 1 \}$$

Pozn.: $(Ax, x) = \sum a_{ij} x_i x_j$ extrémy na $\{\|x\| = 1\}$

(4) Alespoň jedno z čísel $\|T\|$, $-\|T\|$ je vlastním číslem T;

obecně: $\rho(T) \le \|T\|$

zde: $\boxed{\rho(T) = \|T\|}$

(5) Pokud $\lambda \neq \mu$ jsou vl. čísla T a x, y jsou jim odpovídající vl. vektory, tak platí $(x,y) = 0$, tj. $x \perp y$.

(D) $$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) =$$
$$= (x, Ty) = (x, \mu y) \underset{\mu \in \mathbb{R}}{=} \mu(x,y)$$

$$\Rightarrow (x,y) = 0$$

4.3 Kompaktní samoadjungované oper. na H

- Vl. čísla: reálná, nejvýše spoč. mnoho

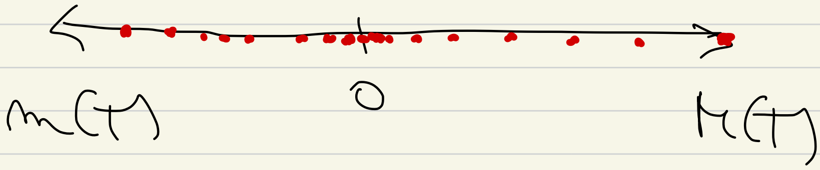
  $\uparrow$ S $\qquad$ $\uparrow$ K

  = jediný hrom. bod = 0

  – 0 může a nemusí být vl. č.

- Prvky spektra: $K \Rightarrow$ jen vl. č. $\cup \{0\}$

  $\subset \mathbb{R}$; $\subseteq \langle m(T), M(T) \rangle$



- Vl. vektory: $\forall$ vl. č. jen konečně mn. LN
  ($\lambda \neq 0$)

  Celkově je jich nejvýše spoč. mn.

=

Cesta k Hilbert–Schmidtova věta

Q: Kdy tvoří tyto vlastní vektory bázi H?

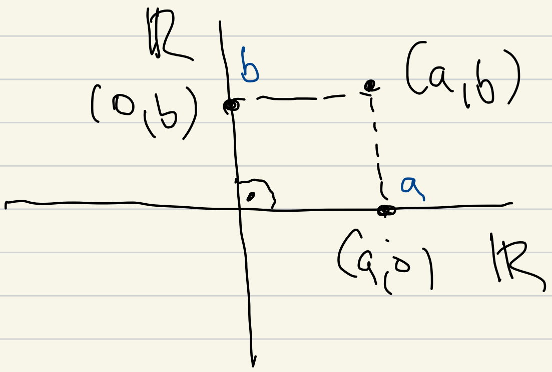
INTERMEZZO I : Direktní součet podprostorů

Def: H lineární (vektorový) prostor, A, B lin. podprostory H. Říkáme: $A \oplus B = H$
("A direktně B $= H$") pokud:

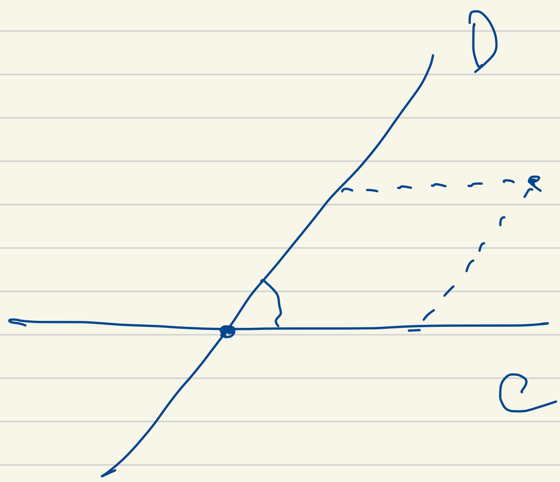
1) $A + B = H$, tj. $\forall h \in H \; \exists a \in A$
$\exists b \in B$, $h = a + b$

2) $A \cap B = \{0\}$

Př. $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



POZOR $C \oplus D = \mathbb{R}^2$

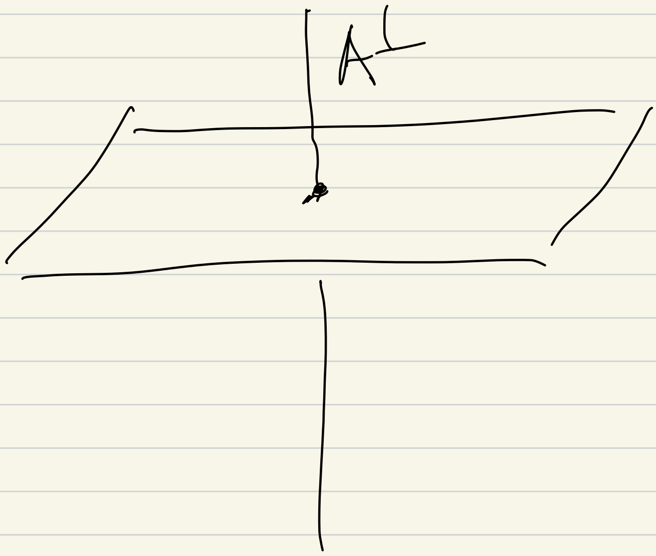


Def: H Hilbertův.

Buď A uzavřený lineární podprostor v H

Def: $A^\perp := \{y \in H,\ (x,y) = 0 \ \forall x \in A\}$

Pozn: a) $A^\perp$ lin. uzavřený podprostor
b) $(A^\perp)^\perp = A$
c) $A \oplus A^\perp = H$
} bez D.



$\mathbb{R}^2 = A \subset \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{INTERMEZZO II}}$: Abstraktní Fourierovy řady v Hilbertových prostorech

<u>Platí:</u> H Hilbert, potom následující 4 výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\exists$ spočetná <u>úplná</u> OG báze $\{e_n\}$ v H
(ON)

(ii) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad \forall x \in H$$

(iii) $$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} \quad \forall x \in H$$
(PARSEVAL)

(iv) H <u>separabilní</u>

kde: • separabilní: $\exists$ spočetná hustá množina v H

Př. $$\underset{\text{nespočetná}}{\mathbb{R}} \rightsquigarrow \underset{\text{spočetná}}{\mathbb{Q}}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

• úplnost $\{e_n\}$: (neex. další nový kolmý)

$$(y, e_n) = 0 \ \forall n \implies y = 0$$

Věta (Hilbert – Schmidt)

H Hilbertův, $T \in \mathcal{C}(H)$, $T = T'$.

$\Lambda :=$ uzavřený lin. podprostor H, generovaný všemi vl. vektory T, které přísluší nenulovým vl. číslům

Potom:

$$\boxed{H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T}$$

- kde $\operatorname{Ker} T = \{x \in H,\ Tx = \underset{0 \cdot x}{\underset{\shortparallel}{0}}\}$

(D) $T \in \mathcal{C}(H)$; $T = T'$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vl. č. T

$E_j = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I)$

$= \{x \in H,\ x \neq 0,\ Tx = \lambda_j x\}$, $j = 1, 2, \dots$

$\dim E_j = n_j \in \mathbb{N}$

$B_j \dots$ báze E_j, $\underbrace{\text{BÚNO je OG}}$

po Gramm – Schmidt OG

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$ ... nejvýše spoč. množina vl-vektorů T

Tvrdím: $\underbrace{B \text{ je OG}}$

↳ • $x, y \in B$, $x \neq y$

(1) $\exists j;\ x, y \in B_j \Rightarrow x \perp y$ (stejné vl. č.)

(2) $\exists j \neq k\ \underbrace{x \in B_j,\ y \in B_k}_{\text{různá vl-č.}} \Rightarrow x \perp y$

$$\Lambda := \overline{\mathrm{Lin}(B)}$$

Ozn: $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$

Vím: • Λ je lin. podprostor (uzávěr lin. podprostoru je lin. podprost.) $\Leftarrow$

• Λ je uzavřený

$\Rightarrow$ Λ je Hilbert.

• Λ je separabilní

Množina

$$\Big\{ \sum_{n=1}^{N} (r_n + i q_n) e_n \ ; \ \underbrace{e_n \in B; \ r_n, q_n \in \mathbb{Q}}_{\text{spočetné}}, N \in \mathbb{N} \Big\}$$

je spočetná + hustá v Λ

$$\Big[\ \Lambda \text{ je separ. Hilbert} \Rightarrow \underbrace{x \in \Lambda \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n}\ \Big]$$

Rozdíl mezi Λ a H ?

Ukažme:

(A) $\boxed{T\Lambda \subset \Lambda}$

$$x \in \Lambda \Rightarrow \exists \gamma_n \in \mathbb{C} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n$$

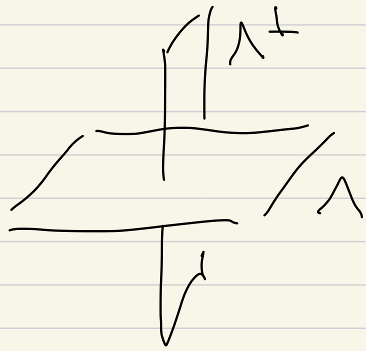
$$Tx = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \underbrace{T e_n}_{\lambda_n e_n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\gamma_n \lambda_n}_{\beta_n \in \mathbb{C}} e_n \in \Lambda, \text{ pokud konverguje}$$

ANO, známe dodat.

(B) Uvažujme $\Lambda^\perp$

$\Lambda \oplus \Lambda^\perp = H$



Tvrdím:

$$\boxed{T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp}$$

Samoadj.:

$$\left.\begin{array}{l} y \in \Lambda^\perp \\ x \in \Lambda \text{ lib.} \\ \Downarrow \\ Tx \in \Lambda \end{array}\right\} \quad (Ty, x) = (y, Tx) = 0 \qquad \underset{\Lambda^\perp}{y \in}\ ,\ \underset{\Lambda}{Tx \in}\ \ \forall x$$

tj. $(Ty, x) = 0 \ \forall x \in \Lambda \Rightarrow Ty \in \Lambda^\perp$ ✓

(C) Předpokládejme $\boxed{T\Lambda^\perp = \{0\}}$

vím: • $\underbrace{\Lambda^\perp \text{ je také uzavř. lin. podpr. } H}_{\Lambda^\perp \text{ je Hilbertův.}}$

$\tilde{T} = T\big|_{\Lambda^\perp}$ vím: $T(\Lambda^\perp) \subset \Lambda^\perp$

$\tilde{T}(\Lambda^\perp) \subset \Lambda^\perp$

$\tilde{T} : \Lambda^\perp \to \Lambda^\perp$

- $\tilde{T}$ je kompaktní a samoadj.
- Ukážeme: $\tilde{T}$ <u>nemá žádné nenulové vl. čísla.</u>

nechť ano:

nechť $\lambda \neq 0$ vl. č. $\tilde{T}$

$$\Rightarrow \exists\, y \neq 0,\ y \in \Lambda^{\perp}$$

$$\underline{\tilde{T}y = \lambda y}$$

ale $\tilde{T}y = Ty = \lambda y \Rightarrow \underbrace{\lambda \text{ je vl. č. } T}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y \in \Lambda}$$

= SPOR

našel jsem $\boxed{\begin{array}{l} y \in \Lambda \cap \Lambda^{\perp} = \{0\} \\ y \neq 0 \end{array}}$

$\Rightarrow \tilde{T}$ nemá žádné nenulové vl. číslo

$$\Rightarrow \sigma(\tilde{T}) \subset \{0\} \Rightarrow \rho(\tilde{T}) = 0$$

$$\rho(\tilde{T}) = \|\tilde{T}\|$$

$$T|_{\Lambda^{\perp}} = 0 \Leftarrow \tilde{T} = 0 \Leftarrow \|\tilde{T}\| = 0$$

$$\|$$

$\Downarrow$

$T(\Lambda^\perp) = \{0\}$ dtd.

$\Downarrow$

Tedy $\Lambda^\perp \subset \operatorname{Ker}(T)$

Vím $\Lambda \oplus \Lambda^\perp = H$

$\Rightarrow \Lambda + \operatorname{Ker} T = H$

Zbývá: $\Lambda \cap \operatorname{ker} T = \{0\}$

Buď $z \in \Lambda \cap \operatorname{ker} T$

$z \in \Lambda \Rightarrow \exists \beta_n \quad z = \sum \beta_n e_n \quad / T$

$$0 = Tz = T\left(\sum^\infty \beta_n e_n\right)$$

$\in \operatorname{ker} T$

$$= \sum^\infty \beta_n T e_n$$

$$= \sum^\infty \beta_n \lambda_n e_n$$

$\Rightarrow \sum^\infty \beta_n \lambda_n e_n = 0$

jednoznačnost F.ř. $\Rightarrow \beta_n \underbrace{\lambda_n}_{\neq 0} = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \beta_n = 0 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \quad z = \sum 0 \cdot e_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda \cap \ker T = \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\Lambda \oplus \ker T = H}$$

$\boxtimes$