2.2. Základní pojmy spektrální analýzy

$$(T - \lambda Id)x = u \qquad (1)$$

$u \in X$ Banach dané, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ parametr

Značení:
- $T_\lambda := T - \lambda I$; $\quad T_\lambda \in \mathcal{L}(X) \iff T \in \mathcal{L}(X)$
- $R(T_\lambda) := \{y \in X;\ \exists x \in X;\ T_\lambda x = y\}$
  $\left(= T_\lambda(X) \right)$

Ad řešitelnost rovnice (1): $\quad T_\lambda x = u$

V řeči rovnice	V řeči T
$\exists$ řešení (1) $\forall u \in X$?	Je T_λ na, tj. $R(T_\lambda) = X$?
Pokud $\exists$ řešení $x \in X$ rn. (1), je určeno jednoznačně?	Je T_λ prostý na X?
Pokud $\forall u\ \exists!\ x$ ....., je toto řešení stabilní?	Je-li T_λ prostý, tak je potom T_λ^{-1} spojitý?

$$T_\lambda x = u \quad \rightsquigarrow \quad x = T_\lambda^{-1} u$$

malá změna $\Longleftarrow$ malá změna

Co máme nájem: T_λ prostota na spojitost T_λ^{-1}

Pozn.: Jak je tomu, pokud $\dim X = n \in \mathbb{N}$

$$T \in \mathcal{L}(X) \iff \exists \text{ matice } M \in \mathcal{M}^{n \times n}$$

$$T(x) = M \cdot x \quad \forall x \in X$$

$$\underbrace{T \text{ prostý}} \iff \underbrace{T \text{ na}} \iff M \text{ regulární}$$

$$\Updownarrow$$

$$T^{-1} \text{ prostý} \iff T^{-1} \text{ na} \iff M^{-1} \text{ regulární}$$

(reprez. T^{-1})

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{T^{-1} \in \mathcal{L}(X)}$$

Fredholmova alternativa: „všechno nebo nic"

V nekonečné dimenzi: dva příklady.

Př.

$$\ell_2 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C},\ \sum_1^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

↳ Hilbert $\quad (\{x_n\},\{y_n\})_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

$$\|\{x_n\}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

$$A_1 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$A_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

- A_1, A_2 lin ✓
- $A_1, A_2 : \ell_2 \to \ell_2$ ✓

$$\|A_1 x\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} < \infty$$

$$\|A_2 x\|_{\ell_2} \le \|x\|_{\ell_2} < \infty$$

- $\|A_1\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_1 x\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|x\| = 1 < \infty$

$\|A_2\|$ $\quad$ - - - - - - $\quad \le \quad$ - - - - - $\quad = 1 < \infty$

$$A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\ell_2)$$

$A_1 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$

$A_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$

Příklad:
- A_1 prostý ✓
- A_1 není <u>na</u> ✓

- A_2 není prostý $\left.\begin{matrix}(2,0,0,0 \dots) \\ (1,0,0,0)\end{matrix}\right\} \longmapsto (0,0,0,\dots)$
- A_2 je <u>na</u>

$\forall y \in l_2 \; \exists x \quad A_2 x = y$

Příklad překvapivé

$\boxed{\text{Věta 1}}$ $A \in \mathcal{L}(X)$, X Banach, nechť A je <u>prostý</u> a <u>na</u>.
Potom $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (tj. A^{-1} je spojitý)

D. Nebude.

Pozn.: $\exists$
- $\boxed{\text{Věta o otevřeném zobrazení}}$
- HAHN – BANACHOVA V.
- BANACH – STEINHAUSOVA V.

J. Lukeš: Zápisky z FA, 4.13 – 4.16

(Lukeš 4.13 – 4.16.)

Možné stavy operátoru

$T_\lambda = T - \lambda I$

		T_λ je „na": $R(T_\lambda) = X$	T_λ „není na": $R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	T_λ „není na": $\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prostý	$\exists T_\lambda^{-1}$ a T_λ^{-1} je spoj.	λ je regulární	~~[L1]~~	$\lambda \in \sigma_R(T)$
	$\exists T_\lambda^{-1}$, ale T_λ^{-1} není spoj.	~~[V1]~~	$\lambda \in \sigma_C(T)$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ není pr.	neex. T_λ^{-1}	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

$\sigma_C(T)$ … spojité spektrum T

$\sigma_R(T)$ … residuální spektrum T

$\sigma_p(T)$ … bodové spektrum T (λ je vl. č. T)

$$\sigma(T) := \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_p(T) \subset \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow$ spektrum T

1) $\lambda \in \sigma_p(T) \iff \exists\, T_\lambda = T - \lambda I$ není prostý

$\exists\, x_1 \neq x_2 \qquad T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$

$T_\lambda(\underbrace{x_1 - x_2}_{x \neq 0}) = 0$

$\exists\, x \neq 0 \qquad T_\lambda x = 0$

$(T - \lambda I)x = 0$

$Tx = \lambda x$

2) Spektrum = soubor „patologických hodnot λ"

Def: Spektrální poloměr $\rho(T) := \sup_{\lambda} \{ |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T) \}$

Pokud $\rho(T) < \infty$

λ je regulární

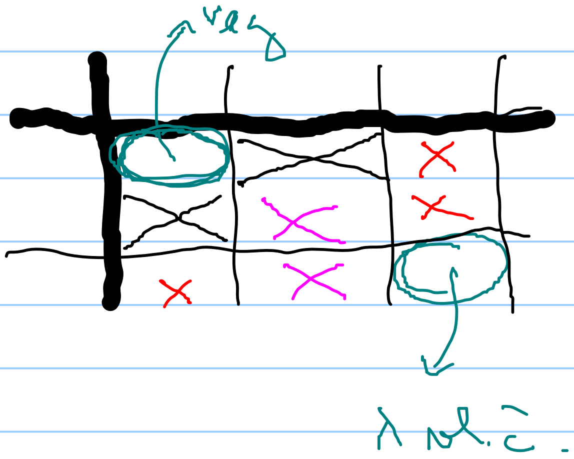
$T \in \mathcal{L}(X) \rightsquigarrow \rho(T) < \infty \implies$ není λ, $|\lambda| > \rho(T)$

$\implies \lambda$ je reg.

$T - \lambda I$ pr., na, T^{-1} sp.

Pozn: Dokážeme později: $\rho(T) \leq \|T\| < \infty$

$\lambda,\ |\lambda| > \|T\| \implies T - \lambda I$



Kon. dim $\dim X < \infty$

$\times$ ... $\dim \mathcal{R}(T_\lambda) = n$ $(\times)$

$< n$ $\neq X$

$\times$ Fredholm

Lemma 1 X Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ $(A = T - \lambda I)$

Potom:

$$\mathcal{R}(A) \neq X,\ \overline{\mathcal{R}(A)} = X,\ A \text{ prostý (tj. } \exists A^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ není spoj.}$$

D. Nechť A^{-1} je spoj.

- $\mathcal{R}(A) \neq X \Rightarrow \exists y \in X \setminus \mathcal{R}(A)$
- $\overline{\mathcal{R}(A)} = X \Rightarrow \exists y_n \in \mathcal{R}(A),\ y_n \to y \in X$

$\exists x_n \in X,\ A x_n = y_n$

- $x_n = A^{-1} y_n$

y_n konverguje $\Rightarrow$ y_n cauchy.

$\Rightarrow$ x_n cauchy

$$\|x_n - x_m\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{C} \|y_n - y_m\|$$

$\exists x$ $x_n \to x$

$$Ax = A(\lim x_n) = \lim \underbrace{Ax_n}_{y_n} = \lim y_n = y$$

A beschr.

$\Rightarrow y \in R(A)$ $\square$