$T: X \to Y$ lineární omezený

$$\left[\text{omezená} \to \text{omezená}\right] \quad \|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq C \quad (\forall K > 0\ \exists C > 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\to \left[\exists C > 0 \quad \|Tx\| \leq C\|x\|\right]$$

spojitý $\quad \underbrace{x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx}$

$T: X \to Y$ lin.

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \in [0, +\infty]$$

může být i ∞

$$x \neq 0 \Rightarrow \left\| T\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\|\cdot\| = 1}\Big) \right\| \leq \|T\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \|T(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| \leq \|T\| \quad \Big/ \cdot \|x\| \neq 0$$

$$\boxed{\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|}$$

1) $\in [0, \infty]$, $\|x\| \neq 0$

2) $\|T\| < \infty$ $\forall x \in X$

Pokud $\|T\| < \infty$ ✓ $x = 0$

Lemma Pokud $T: X \to Y$ lineární, potom

$$T \text{ omezený } \iff \|T\| < \infty$$

D „$\Rightarrow$": T omezený: $\|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq c$

$(\forall K > 0\ \exists c > 0)$

Vol $K = 1$ .... $\exists c > 0$ $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq c$

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq c$$

„$\Leftarrow$": $\|T\| =: c < \infty$, $\quad \|Tx\| \leq \overbrace{\|T\|}^{c} \cdot \|x\| \quad \forall x$

$$\exists c > 0 \quad \|Tx\| \leq c\,\|x\|$$

$\boxtimes$

Lemma $T: X \to Y$ lineární; potom je ekvivalentní

T omezený $\iff$ T spojitý $(\iff \|T\| < \infty)$

(1) (2) (3)

D (1) $\iff$ (3) je předchozí lemma.

(1) $\Rightarrow$ (2) omezenost

$\Rightarrow$ $\|T(x_n - x)\| \leq c\,\|x_n - x\|$

lim $\|Tx_n - Tx\| \leq c\,\|x_n - x\|$

$\Rightarrow x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

spoj.

$(2) \Rightarrow (1)$ mám $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

špeciálne $x_n \to 0 \Rightarrow Tx_n \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underbrace{\delta > 0}_{\text{pevné}}, \quad \|x_n\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx_n\| \leq 1$

VOL $\underbrace{\varepsilon = 1}$

$$\|x\| \leq K \Rightarrow \left\| \frac{x}{K}\delta \right\| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \left\| T\left(\frac{x}{K}\delta\right) \right\| \leq 1$$

$\forall K > 0 \ \exists c > 0$ $\quad \|Tx\| \leq \frac{K}{\delta} =: c$

pevné

- $\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y, \ T$ lin. a ohr. $\}$ $\boxtimes$

(a teda spojité)

- Pokiaľ Y Banach, tak $\mathcal{L}(X,Y)$ je tiež Banachov

$\|T\|$ je v ňom úplnou normou

$$T_n \in \mathcal{L}(X,Y) \qquad T_n \to T \text{ v } \mathcal{L}(X,Y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\|T_n - T\| \xrightarrow[\mathcal{L}(X,Y)]{} 0$$

Špeciálne $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ je Banachov $=: \mathcal{L}'(X)$

$\hookrightarrow \mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$

$\mathcal{L}(X,X) \equiv \mathcal{L}(X)$

V Vliv konečné a nekonečné dimenze

Lemma $T: X \to Y$ lineární, X, Y Banachy, $\underline{\dim X < \infty}$

Potom T je omezený a tedy i spojitý

D $x \in X$, $\dim X < \infty$, $\dim X = n \in \mathbb{N}$

Báze: $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ Pevná

$x = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \qquad a_j \in \mathbb{K}$

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum a_j x_j\right)\right\| = \left\|\sum^{n} a_j T x_j\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \cdot \|Tx_j\| = \underbrace{\max_{j=1,\dots,n} \|Tx_j\|}_{=: C < \infty} \cdot \sum^{n} |a_j|$$

$$= C \underbrace{\sum^{n} |a_j|}_{\|x\|_M} \leq C \cdot K \|x\|$$

$\|x\|_M$ ... jedna z norem

$\exists K > 0 \quad \|x\|_M \leq K \|x\|$

$\Rightarrow T$ omezený.

<u>Poznámka</u>: $\dim X = \infty$, tak $\exists\, T: X \to Y$ T lineární $\wedge$ T nespojitý

2. ZÁKLADY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

2.1 Motivace: řešení jedné ODR

Př

$$y'' + y = f(x) \qquad (0,a) \quad a>0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$f \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \cos x$$

$$f \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Var. konst.}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= f(x) \end{aligned}$$

$$c_1' = -f \sin x$$

$$c_2' = f \cos x$$

$$c_1(x) = -\int_0^x f(t) \sin t \qquad c_2(x) = \int_0^x f(t) \cos x$$

$$y_p = \cos x\left(-\int_0^x f \cdot \sin t\right) + \sin x \int_0^x f \cdot \cos t$$

$$= \int_0^x f(t)\Big(\underbrace{\sin x \cos x - \cos x \sin t}_{\sin(x-t)}\Big)\,dt$$

$$y_p = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$\underbrace{y = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt}_{f \in C((0,a))}$$

Zk.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

$$+\, g(b(x))\cdot b'(x) - g(a(x))\cdot a'(x)$$

(Vše je C^1 a omezené $\Rightarrow$ ✓)

Vyjde.

$$(+)\begin{cases} y'' + y = f(x)\,y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (0,a) \quad a>0$$

$$f \in \mathcal{C}([a,b])$$

$\Downarrow$

$$T: y \longmapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)$$

$$y = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt \qquad (*)$$

D.CV: $(*)$ splňuje $(+)$

$\Downarrow$

je popis řešení, ale ne řešení

$\rightarrow \quad y(x) = \underbrace{\cos x}_{u(x)} + Ty(x) \qquad \forall x \in (0,a)$

$\rightarrow \quad y = u + Ty \qquad \text{v } \mathcal{C}([0,a])$

$$y - Ty = u$$

$$(Id - T)\,y = u$$

$$\underbrace{y = (Id - T)^{-1}\, u} \qquad (**)$$

?

$$\underbrace{\exists\, (Id - T)^{-1}}$$

$$Ty(x) = \int_0^x f(t)\, y(t) \sin(x-t)\, dt$$

$$T : C(\langle 0, a\rangle) \to C(\langle 0, a\rangle)$$

Banach

- $T \in \mathcal{L}(X)$ –
- . . . .

$\Downarrow$

$\exists\, (Id - T)^{-1}$

T lineární

? T omezený (spojitý?)

? $\exists\, (Id - T)^{-1}$

? Řeší (**) úlohu

$(I - T)^{-1}$

$(T - I)^{-1}$

$(T - \lambda I)^{-1}$?

$\boxtimes$