

P2, 9.3.2021

- 1 -

$T: X \rightarrow Y$   
lineární

omezený

omezená  $\rightarrow$  omezená

$$\|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq C$$

( $\forall K > 0 \exists C > 0$ )

$\rightarrow$

$$\exists C > 0 \quad \|Tx\| \leq C \|x\|$$

Spojitý

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$$

$T: X \rightarrow Y$  lin.

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \in [0, +\infty]$$

může být  $\infty$

$$x \neq 0 \Rightarrow \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|T\|$$

$\| \cdot \| = 1$

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \|T(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| \leq \|T\| \quad / \cdot \|x\| \neq 0$$

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

Podmínka  $\|T\| < \infty \Leftrightarrow$  ✓  
 $x=0$

- 1)  $\in [0, \infty]$ ,  $\|x\| \neq 0$
- 2)  $\|T\| < \infty \quad \forall x \in X$

**Lemma** Pokud  $T: X \rightarrow Y$  lineární, potom

$$T \text{ omezený} \Leftrightarrow \|T\| < \infty$$

② " $\Rightarrow$ ": Omezený:  $\|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq c$   
 $(\forall K > 0 \exists c > 0)$

vol  $K=1 \dots \exists c > 0 \quad \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq c$

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq c$$

" $\Leftarrow$ ":  $\|T\| =: c < \infty$ ,  $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall x$

$$\exists c > 0 \quad \|Tx\| \leq c \|x\|$$

**Lemma**  $T: X \rightarrow Y$  lineární; potom je ekvivalentní ☒

$$\begin{array}{ccc} T \text{ omezený} & \Leftrightarrow & T \text{ spojitý} & (\Leftrightarrow \|T\| < \infty) \\ (1) & & (2) & (3) \end{array}$$

② (1)  $\Leftrightarrow$  (3) je předchozí lemma.

(1)  $\Rightarrow$  (2) omezenost

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{lin} \left\{ \begin{array}{l} \|T(x_n - x)\| \leq c \|x_n - x\| \\ \|Tx_n - Tx\| \leq c \|x_n - x\| \end{array} \right. \end{array}$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$$

(2)  $\Rightarrow$  (1)  $x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$

Specialné

$x_n \rightarrow 0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow 0$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  ,  $\|x_n\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx_n\| \leq \epsilon$   
 VOZ  $\epsilon = 1$  perone

$\|x\| \leq K \Rightarrow \left\| \frac{x}{K} \delta \right\| < \delta$

$\Rightarrow \|T\left(\frac{x}{K} \delta\right)\| \leq 1$

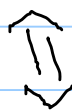
$0 < \epsilon < K \delta$

$\|Tx\| \leq \frac{K}{\delta} \epsilon =: c$   
↑  
perone

$\mathcal{L}(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y, T \text{ lin. a omer.}\}$  □  
 (a leq yjele)

• Bolud Y Banach, taci  $\mathcal{L}(X, Y)$  je leq Banachov  
 $\|T\|$  je v nem reflexu normov

$T_n \in \mathcal{L}(X, Y) \quad T_n \rightarrow T \quad \text{v } \mathcal{L}(X, Y)$



$\|T_n - T\| \xrightarrow{\mathcal{L}(X, Y)} 0$

Specialné  $\mathcal{L}(X, K)$  je Banachov  $=: \mathcal{L}(X)$   
 $\hookrightarrow \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(X, X) \equiv \mathcal{L}(X)$$

Ⓜ  
Ⓜ  
Vliv konečné a nekonečné dimenze

**Lemma**  $T: X \rightarrow Y$  lineární,  $X, Y$  Banachi,  $\dim X < \infty$

Potom  $T$  je omezený a tedy i spojý

Ⓜ  
Ⓜ  
 $x \in X$   
 $\dim X < \infty$   
" "  
 $m \in \mathbb{N}$

Báze:  $\{x_j\}_{j=1}^m$  *Pevná*  
 $x = \sum_{j=1}^m a_j x_j$   $a_j \in \mathbb{K}$

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^m a_j x_j\right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^m a_j T x_j \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^m |a_j| \cdot \|T x_j\| = \underbrace{\max_{j \in \{1, \dots, m\}} \|T x_j\|}_{=: C < \infty} \cdot \sum_{j=1}^m |a_j|$$

$$= C \underbrace{\sum_{j=1}^m |a_j|}_{\|x\|_M} \leq C \cdot K \|x\|$$

$\|x\|_M \dots$  jako 2 norm

$$\exists K > 0 \quad \|x\|_M \leq K \|x\|$$

$\Rightarrow T$  omezený.

Poznámka,  $\dim X = \infty$ , tak  $\exists T: X \rightarrow Y$   
 $T$  lineární &  $T$  spojý

## 2. ZÁKLADY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

-5-

### 2.1. Motivace: řešení jedné ODR

$P_n$

$$y'' + y = f(x) \quad (0, a) \quad a > 0$$

$$y(0) = 1$$

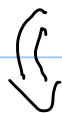
$$y'(0) = 0$$

---

$$f \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \cos x$$

$$f \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Var. konst.}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$



$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$

$$-c_1' \sin x + c_2' \cos x = f(x)$$

---

$$c_1' = -f \sin x$$

$$c_2' = f \cos x$$

$$c_1(x) = -\int_0^x f(t) \sin t \, dt$$

$$c_2(x) = \int_0^x f(t) \cos t \, dt$$

$$y_p = \cos x \left( - \int_0^x f \cdot \sin t \right) + \sin x \int_0^x f \cdot \cos t \quad -6-$$

$$= \int_0^x f(t) \underbrace{(\sin x \cos t - \cos x \sin t)}_{\Delta \sin(x-t)} dt$$

$$y_p = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

$$y = \cos x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

$f \in \mathcal{C}([a, a])$

~~zk~~

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} g(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$$

$$+ g(b(x)) \cdot b'(x) - g(a(x)) \cdot a'(x)$$

(Use je  $\mathcal{C}^1$  a omezené  $\Rightarrow \checkmark$ )

Výjde .

$$\textcircled{+} \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = f(x) y(x) \quad (0, a) \quad a > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \quad f \in \mathcal{C}([a, b])$$



$$T: y \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) y(t) dt$$

$$y = \cos x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) y(t) dt \quad (*)$$

D.C.V: (\*) splňuje  $\textcircled{+}$

↓  
 popis řešení, ale ne řešení

$$\rightarrow y(x) = \underbrace{\cos x}_{u(x)} + T y(x) \quad \forall x \in (0, a)$$

$$\rightarrow y = u + T y \quad u \in \mathcal{C}([0, a])$$

$$y - T y = u$$

$$(Id - T)y = u$$



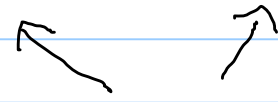
$$y = (Id - T)^{-1} u \quad (**)$$

?

$$\exists (Id - T)^{-1}$$

$$T_y(x) = \int_0^x f(t) y(t) \sin(x-t) dt$$

$$T: C([0, a]) \rightarrow C([0, a])$$



T linear, Bewach

- $T \in \mathcal{L}(X)$  -
- .....

⇓

$\exists (Id - T)^{-1}$

?

T invertierbar (ggg?)

?

$\exists (Id - T)^{-1}$

?

Resolvent (\*\*) bilden

$$(I - T)^{-1}$$

$$(T - I)^{-1}$$

$$(T - \lambda I)^{-1} \quad (?)$$

