P1, 2.3.2021

1. ÚVOD: OPERÁTOROVÁ TRIVIA

Co budeme považovat za známé:

Vektorový prostor: X nad $\underbrace{\mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}}_{\mathbb{K},\ \mathbb{F}}$ ($\mathbb{Q}$)
(VP, LP, LVP)

→ Lineárně nezávislá (LN) ve VP

$M \subseteq X$ je LN, pokud

$$a_1x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

$\forall$ n-tice $x_1, \dots, x_n \in M$ $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

Tato def. platí i v případě, že M má nek. mnoho prvků.

!! $$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = \lim_{n\to\infty} \sum^{n}$$

„Nekonečné součty patří do analýzy, algebra zná jen součty konečné"

→

- Báze v X, $X \neq \emptyset$, $X \neq \{0\}$

1) Pokud existuje v X konečná LN množina $B \subseteq X$, že

$$\mathrm{lin}(B) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \,,\; x_j \in B \,,\; a_j \in \mathbb{K} \right\}$$
$$\shortparallel$$
$$X$$

(„B generuje X") , $\Rightarrow$ B je <u>báze</u>

Platí : $\mathrm{moh}(B) = \mathrm{card}(B) = |B|$ (počet prvků) je určen jednoznačně.

$$\Downarrow$$

$$|B| = \underbrace{\dim X = n \in \mathbb{N}}$$

2) Pokud v X existuje LN množina o $n \in \mathbb{N}$ prvcích $\forall n \in \mathbb{N}$, tak řekneme, že

$$\underbrace{\dim X = \infty}$$

Př: $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ $\dim \mathcal{C}([0,1]) = \infty$

Pokud $\dim X = \infty$, řekneme, že jeho bází B je taková <u>nekonečná</u> množina B, že a) B je LN (viz výše)

b) $\forall x \in X \; \exists m = m(x) \in \mathbb{N}$

$$x = \sum_{j=1}^{m(x)} a_j x_j \;; \quad x_j \in B,\; a_j \in \mathbb{K}$$

Př: 1) $\dim \underset{VP}{\mathbb{R}} \,(\text{nad } \underset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}}) = 1$ $\quad B = \{1\}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = a \cdot 1$, $\mathbb{K}$

2) $\dim \mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ $=$ n

3) $\underbrace{\dim \mathbb{R} \text{ (nad } \mathbb{Q})}$ HAMMELOVA BÁZI

nemůže mít kon. bázi,
nemůže mít spočetnou bázi

Pokud má bázi, tak tato má nespočetně prvků

Q: Má každý VP bázi

uznáváme Axiom výběru ANO

neuznáváme AV $\Rightarrow$ NE

- Norma v X (VP) $\quad \|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$(X, \|.\|)$ ... NLP $\quad$ (NVP)

$x_n \xrightarrow{\|.\|} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$

$\lim x_n = x$

$\sum^{\infty} = \lim \sum^{n}$

Cauchyovskost:

$\{x_n\}$ cauchyovská $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0$

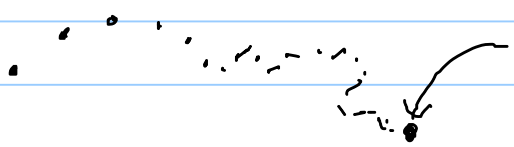
$$\|\underbrace{x_n - x_m}\| < \varepsilon$$

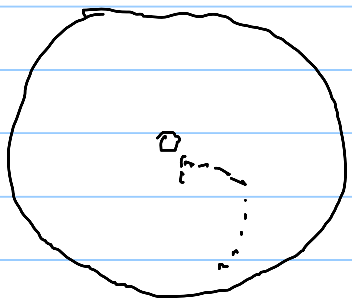
$\boxed{\text{Úplnost } X \text{ v normě}}$ (X ... NLP)

$(X, \|\cdot\|)$ je úplný (v normě)

$\Updownarrow$

$\left(\forall \{x_n\} \text{ cauchyovská} \Rightarrow \{x_n\} \text{ je konverg.}\right.$
$\left. \text{tj. } \exists x \in X;\ x_n \to x \right)$





úplný = „bez děr"

$\boxed{\text{Def:}}$ X ... NLP je úplný v $\|\cdot\|$, nazývá se $\boxed{\text{Banachův}}$

Za známé budeme považovat, že pokud X Banachův, navíc dim $X < \infty$, tak všechny možné normy na něm jsou ekvivalentní, tj.

$\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X jsou ekvivalentní, pokud $\exists c_1, c_2 > 0$

$$c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

$$c_1\|x_n - x\|_1 \le \|x_n - x\|_2 \le c_2\|x_n - x\|_1$$

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$$

$\dim X < \infty$: invariance limity vůči $\|\cdot\|$

Př. $\dim X = \infty$?

$$\underbrace{C([-1,1]) \quad \|f\|_\infty := \max_{[-1,1]} |f(x)|}_{\text{je úplný}}$$

$$\underbrace{C([-1,1])}_{\text{neúplný}} \quad \|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$$

(přirozeně v $L^1(-1,1)$)

$$\operatorname{arctg} nx \to \underbrace{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}_{\notin C[-1,1]} \text{ bodově}$$

• Sk. součin: X LP : $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$(x,y) = \overline{(y,x)} \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$
$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$$
$$(x,x) \geq 0 \qquad \left((x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \right)$$
$$(ax,y) = a(x,y) \qquad a \in \mathbb{K}$$

Lze ukázat: $\boxed{\|x\| := \sqrt{(x,x)}}$

splňuje axiomy normy.

Norma generovaná (indukovaná) sk. s.

$(X, (\cdot,\cdot))$ je úplný n. $\Rightarrow$ X je Hilbertův

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Cauchy – Schwarzova nerov.

kde $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Kolmost: $x, y \in X$ (X se sk. součin)

$x, y \neq 0$ a $(x,y) = 0$

Př.: $\mathbb{R}^n$ je Hilbertův $\quad (x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

$$L^2(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C} ;\ \int_a^b |f|^2 < \infty \right\}$$

$$(f,g)_2 := \int_a^b f \overline{g}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2} < \infty$$

Hilbert

$$\ell_2 := \left\{ \{x_n\} \subseteq \mathbb{C} ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

$$\|\{x_n\}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} < \infty$$

Hilb.

$$W^{1,2}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} ;\ \int_\Omega |f|^2 + |\nabla f|^2 < \infty \right\}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená

$$(f,g) = \int_\Omega f \cdot \overline{g} + \nabla f \cdot \overline{\nabla g}$$

Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \text{"} f, Df, \dots D^k f \in L^p \text{"}$$

Hilbertův

Banachovy, ne Hilbertovy:

C; L^p pro $p \neq 2$

$$L^p(\Omega) = \left\{ \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

$p \in [1, \infty)$

$W^{k,p}$ pro $p \neq 2$

X

Zobrazení mezi LP

(I) $X, Y \dots LP$ operátor: $T: X \to Y$

funkcionál: $T: X \to \mathbb{K}$

- derivace je operátor
- urč. integrál je funkcionál.

(II) $T: X \to Y$ operátor

- lineární $T(ax + by) = aTx + bTy$ $\forall x, y \in X$ $\forall a, b \in \mathbb{K}$
- nelineární $\dots\to$ není lineár.

III $T: X \to Y$

omezený: $\forall k>0 \; \exists c>0 \; \underbrace{\|x\| \le k \Rightarrow \|Tx\| \le c}_{\text{omezené} \to \text{omez.}}$

$\exists c>0 \quad \|Tx\| \le c\|x\| \quad \forall x \in X$

DCV: ekviv. definice

neomezený: není omezený

formální negace 1. definice:

$$\exists k>0 \; \forall c>0 \; \exists x_c \in X$$

$$\|x_c\| \le k \;\&\; \|Tx\| \ge c$$

Př. $f_n(x) := \sin nx, \; x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\|\sin nx\|_\infty \le 1$$

$$T: f \to f' ; \quad f'_n(x) = n\cos nx$$

$$\|f'_n\|_\infty = n$$

IV X, Y Banachovy, $T: X \to Y$

T spojitý: $(x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx) \quad \forall x_n$

nespojitý: není spoj.

$\boxtimes$