6. LIN. DIFER. OPERÁTORY

6.1. Výrazy v samoadjungovaném tvaru

Mějme

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)} \qquad \left.\begin{array}{l} y \in C^n(a,b),\ y = y(x) \\ -\infty \leq a < b \leq +\infty \\ p_k \in C(a,b),\ p_n \not\equiv 0 \text{ na } (a,b) \end{array}\right\} y, p_k \text{ cplx. fce}$$

Nazveme jej lineární diferenciální výraz (LDV) n-tého řádu.
Pod pojmem lineární diferenciální operátor (LDO) n-tého řádu budeme rozumět LDV + definiční obor

$$L = l \ \& \ \mathcal{D}(L), \text{ tj. } L = l|_{\mathcal{D}(L)}.$$

Budeme chtít, aby L byl hustě definovaný v H (Hilbertův), tj. $\mathcal{D}(L) \neq H$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = H$.
Typicky budeme mít (viz předch. kapitola)

$$\mathcal{D}(L) = \left(H \cap C^n(a,b)\right) + \text{okrajové podm.}$$

Přitom víme, že symetrie operátoru je nutnou podmínkou samoadjungovanosti.
V dalším se budeme zabývat hledáním dalších nutných podmínek samoadjungovanosti resp. symetrie. Typicky budeme pracovat s prostorem

$$C^\infty_{cpt}(a,b) = \{ f \in C^\infty(a,b),\ \exists K \subset (a,b) \text{ kompakt},\ f \equiv 0 \text{ na } (a,b) \setminus K \}$$

výhodou tohoto přístupu je to, že při per partes pro funkce $f \in C^\infty_{cpt}(a,b)$ jsou hraniční členy nulové, a tedy se nemusíme zabývat okrajovými podmínkami.

① Definujme tzv. adjungovaný výraz k $l(y)$:

$$l^*(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k(y)}\, y\right)^{(k)}$$

Lemma K danému l je l^* jediný lineární diferenciální výraz, pro který

$$(l(y), z) = (y, l^*(z)) \qquad \forall y, z \in C^\infty_{cpt}(a,b)$$

① • Rovnost = per partes:

$$(l(y), z) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x)\, y^{(k)}\, \overline{z(x)} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \int_a^b \left(p_k(x)\, \bar z\right)' y^{(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_a^b \underbrace{\left(p_k(x)\, \bar z\right)^{(k)}}_{\overline{\left(\overline{p_k(x)}\, z\right)^{(k)}}} y(x) = (y, l^*(z))$$

• Jednoznačnost: nechť jsou dva, l^* a $\tilde l$; pak

$$(l(y), z) = (y, l^*(z)) = (y, \tilde l(z)) \qquad \forall\, y, z \in C^\infty_{cpt}(a,b)$$

$$l^*(z) = \tilde l(z) \qquad \forall\, z \in C^\infty_{cpt}(a,b) \qquad \boxed{\text{cbd}}.$$

② Další nutná podmínka samoadjungovanosti: $l = l^*$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\, y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\bar p_k\, y\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \bar p_k^{(k-j)}\, y^{(j)}$$

Srovnejme koef. u $y^{(n)}$: $\quad p_n = (-1)^n\, \bar p_n$

- n sudé: $p_n = \bar p_n \Rightarrow p_n$ reálný
- n liché: $p_n = -\bar p_n \Rightarrow \underbrace{p_n + \bar p_n}_{2\operatorname{Re} p_n} = 0 \Rightarrow p_n = i q_n$, q_n reálný

Ale... lze z toho odvodit tvar tzv. elem. diferenciálních výrazů

Def: Elementárními dif. výrazy nazvu LDV tvaru

$$E_{2k} = (-1)^k \left(p\, y^{(k)}\right)^{(k)}$$

$$E_{2k-1} = \frac{i}{2}\left[\left(p\, y^{(k-1)}\right)^{(k)} + \left(p\, y^{(k)}\right)^{(k-1)}\right]$$

p reálná fce, $k = 1, 2, \dots$

Ukaž

Věta (Čihák, str. 210)

$l(y) = l^*(y)\ \forall y \in C^\infty_{cpt}(a,b) \iff l$ je konečnou lin. kombinací výrazů tvaru E_{2k} a E_{2k-1}.

② Čihák

(Př) $E_1 = \frac{i}{2}\left((py)' + py'\right) = \frac{i}{2}\left(p'y + 2py'\right) = ipy' + \frac{i}{2}p'y$. Pro $p \equiv 1$: iy'

$E_2 = -(py')'$ … tzv. <u>diferenciální výraz 2. řádu v samoadj. tvaru</u>

$\boxed{6.2}$ Ortogonální báze v L^2_ρ složené z polynomů

Uvažujme

$$H = L^2_\rho(a,b) := \{ f : (a,b) \to \mathbb{C};\ \int_a^b \rho |f|^2 < \infty, \text{ kde } \rho : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ je tzv.}$$

<u>váha</u>, splňující $\rho > 0, \rho \in C, \rho \in L^1 \}$

<u>Pozn:</u> $\rho \in C$ se někdy nevyžaduje.

Lze ukázat, že $L^2_\rho(a,b)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(y,z)_{2,\rho} := \int_a^b \rho y \bar{z}$$

a normou

$$\|y\|^2_{2,\rho} = \int_a^b \rho |y|^2 .$$

<u>Pozn:</u> Proč uvažujeme L^2_ρ? Například proto, že chceme pracovat s polynomy na $\mathbb{R}$. Přitom <u>žádný</u> polynom P není prvkem $L^2(\mathbb{R})$. Ale <u>všechny</u> polynomy jsou prvkem $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$.

Uvažujme nyní $\quad T : \underset{\underset{L^2_\rho}{\cap}}{D(T)} \longrightarrow L^2_\rho$; $\overline{D(T)} = L^2_\rho$, symetrický na $D(T)$.

Přitom $D(T)$ nechť je takové, že $D(T) \subset L^2_\rho \cap L^2$.

Definujme vlastní číslo λ a vl. fci y operátoru T, <u>s vahou ρ</u>: $Ty = \lambda \rho y$.

Úvaha

$$(Ty,y)_2 \overset{\text{vl. č. s vahou}}{=} (\lambda y \rho, y)_2 = \lambda (\rho y, y)_2 = \lambda \int_a^b \rho |y|^2 = \lambda \|y\|^2_{2,\rho}$$

$\Vert$ sk. součin <u>bez váhy</u>, tj. samoadjungovaný <u>bez váhy</u>

$$(y, Ty)_2 = \dots \bar{\lambda} \|y\|^2_{2,\rho}$$

, ano, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokud $y \in D(T)$.

Dále, pro $Ty_j = \lambda_j \rho y_j$ $\quad j=1,2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, máme

$$\lambda_1 (y_1,y_2)_{2,\rho} = \lambda_1 (y_1\rho, y_2)_2 = (Ty_1,y_2)_2 = (y_1, Ty_2) = \dots \lambda_2 (y_1,y_2)_{2,\rho}$$

$$\overset{\lambda_1\neq\lambda_2}{\Rightarrow} \quad (y_1,y_2)_{2,\rho} = 0 \Rightarrow \underline{\text{kolmé v } L^2_\rho}$$

<u>Závěr:</u> Rozšiřujeme vl. č. „s vahou a sk. součin bez váhy".
Dostáváme OG systém v L^2_ρ.
Obecně v tomto případě není k dispozici
- výsledek o existenci úplného OG fcí
- výsledek o úplnosti báze (musí se dokazovat případ od případu).

Víme však, že generujeme OG množiny, a také máme k dispozici Weierstrassovu větu o tom, že polynomy jsou husté v $C(K)$, (pokud K je kompakt), která je zase hustá v $L^2_\rho(K)$. Proto se dá rozumně zabývat se OG systémy polynomů v L^2_ρ. Pro $L^2_\rho(K)$ pak plyne úplnost OG množiny z Weierstrassovy věty. Na nekompaktech se ovšem úplnost OG množiny dokazuje obtížně.

Následující věta může být trochu překvapivá.

Věta $L^2_\rho(a,b)$; $-\infty \le a < b \le +\infty$, ρ taková váha, že $\|P\|_{2,\rho} < \infty$ $\forall P$ polynom.
Buď $\{\varphi_n\}$ systém reálných OG polynomů v L^2_ρ; st $\varphi_n = n$, $n = 0,1,2,3\dots$
Potom $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$, že

$$\boxed{x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}}$$

Dk: $n=0 \Rightarrow \varphi_0 = c_{\neq 0}$, potom $x\varphi_0 = cx = \frac{c}{a}\underbrace{(ax+b)}_{\varphi_1} - \frac{b}{a}\cdot\underbrace{c}_{\varphi_0}$ $\Rightarrow x\varphi_0 = \frac{c}{a}\varphi_1 - \frac{b}{a}\varphi_0$
$(a \neq 0)$

(1) $n \in \mathbb{N}$: st$(x\varphi_n) = n+1 \Rightarrow \exists \gamma_{n,k} \in \mathbb{R}$

$$x\varphi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k}\varphi_k \qquad (*)$$

(platí obecně pro jakékoli polynomy, st $\varphi_n = n$, nemusí být OG – rozmyslete si)

$$/\cdot(\cdot,\varphi_j)_{2,\rho} \quad \forall j = 0,\dots$$

$$(x\varphi_m,\varphi_j)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{m+1} \gamma_{m,k}\underbrace{(\varphi_k,\varphi_j)_{2,\rho}}_{\delta_{kj}\|\varphi_k\|^2_{2,\rho}} = \gamma_{m,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \qquad j\le m+1 \qquad (+)$$

$(=0$ pro $j>m+1)$

$\gamma_{m,j}=0$ pro $j>m+1$: suma uprostřed je rovna nule pro $j>m+1$, neb $\varphi_k\perp\varphi_j$ pro $k\in\{0,\dots,m+1\}$ a $j>m+1$. Ostatně sama definice oné sumy lze chápat tak, že $\gamma_{m,k}=0$ pro $k>m+1$ (a brát onu sumu formálně jako $\sum_0^\infty$)

Díky reálnosti φ_m je však

$$(x\varphi_m,\varphi_j)_{2,\rho} = (\varphi_m,x\varphi_j)_{2,\rho} = \Big(\varphi_m,\sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}\varphi_p\Big) = \underbrace{\sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}(\varphi_m,\varphi_p)_{2,\rho}}_{=0\ \forall m>j+1}$$

ze stejného důvodu

Tato suma je však dle $(+)$ stále rovna $\gamma_{m,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \Rightarrow \gamma_{m,j}=0\ \forall j<m-1$

Celkem $\gamma_{m,j}=0\ \forall j\neq m-1,m,m+1 \Rightarrow (*)$ se redukuje na

$$x\varphi_m = \underbrace{\gamma_{m,m-1}}_{=:B_m}\varphi_{m-1} + \underbrace{\gamma_{m,m}}_{=:C_m}\varphi_m + \underbrace{\gamma_{m,m+1}}_{=:A_m}\varphi_{m+1}$$

$\boxed{\text{cbd}}$.

Pozn.: Navíc lze ukázat, že $\left.\begin{array}{l} a=-b \\ \rho \text{ sudá} \\ \text{na } (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow C_m=0\ \forall m$

Použití právě odvozeného rekur. vzorce – výpočet OG systému polynomů
– výpočet jejich norem:

$$x\varphi_m = A_m\varphi_{m+1} + C_m\varphi_m + B_m\varphi_{m-1}, \qquad m=1,2,3,\dots$$

a) $A_m\neq 0$, jinak je stupeň polynomu vpravo $=m$.

b) Vynásob. rekur. vztah $(\cdot,\varphi_{m+1})_{2,\rho}$: $\quad (x\varphi_m,\varphi_{m+1})_{2,\rho} = A_m\|\varphi_{m+1}\|^2_{2,\rho}$

c) Vynásob. rekur. vztah $(\cdot,\varphi_{m-1})_{2,\rho}$: $\quad \underbrace{(x\varphi_m,\varphi_{m-1})_{2,\rho}}_{\|} = B_m\|\varphi_{m-1}\|^2_{2,\rho}$

$$(x\varphi_{m-1},\varphi_m)_{2,\rho} = A_{m-1}\|\varphi_m\|^2_{2,\rho}$$

$\Rightarrow \quad A_{n-1}\|\varphi_n\|^2_{2,\rho} = B_n\|\varphi_{n-1}\|^2_{2\rho} \qquad A_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B_n \neq 0 \ \forall n = 2,3,4\dots$

$$\Rightarrow \boxed{\|\varphi_{n+1}\|^2_{2\rho} = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|^2_{2\rho} \qquad n = 1,2,\dots}$$

Rekur. vzorec pro normy.
$\|\varphi_0\|, \|\varphi_1\|$ je třeba znát, od φ_2 vyjde.

Literatura pro ortog. systémy
KREYSZIG: Introductory FA with applications.

Bonus: Důkaz tvrzení o paritách na předchozí straně:
Z vlastností polynomů ortog. máme

$$\varphi_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k}\varphi_k(x) \qquad / (\cdot, \varphi_j(x))_{2,\rho}$$
$j = 0, \dots, n$
(jinak je součin $= 0$)

$$(\varphi_n(-x), \varphi_j(x))_{2,\rho} = \beta_{n,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho}$$
$$\| $$
$$\int_{-a}^{a}\varphi_n(-x)\varphi_j(x)\rho(x)\,dx = -\int_{a}^{-a}\varphi_n(t)\varphi_j(-t)\rho(t)\,dt = (\varphi_n(x), \varphi_j(-x))_{2,\rho}$$
$$\begin{bmatrix} t = -x \\ dt = -dx \end{bmatrix}$$

$$= \left(\varphi_n(x), \sum_{m=0}^{j}\beta_{j,m}\varphi_m(x)\right) = 0 \quad \text{pro } n > j.$$
$\Downarrow$
Vše nulové
jen pro $j = n$.

$$\Rightarrow \underline{\varphi_n(-x) = \beta_{n,n}\varphi_n(x)}$$

Srovnejme vyšší koeficienty u x^n v polynomu φ:
$$a_n(-x)^n = \beta_{n,n}a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \beta_{n,n} = (-1)^n$$

Proto $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x) \quad \Rightarrow \quad (\varphi_n(-x))^2 = (\varphi_n(x))^2$

tj. $|\varphi_n|^2$ je <u>sudá</u>.

Závěrem, $\quad x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1} \quad / (\cdot, \varphi_n)_{2,\rho}$

$$(x\varphi_n, \varphi_n) = C_n\|\varphi_n\|^2_{2,\rho}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x\varphi_n, \varphi_n) = C_n\|\varphi_n\|^2_{2,\rho} \\ \quad \| \\ \displaystyle\int_{-a}^{a} x|\varphi_n|^2\rho(x) = 0 \quad \text{neboť } x \text{ lichá}, \ |\varphi_n|^2\rho \text{ sudá} \end{array}\right\} \Rightarrow C_n = 0$$

ctd. $\boxtimes$

6.3 Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů

Uvažujme tzv. Gaussovu redukovanou rovnici

$$xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y = 0, \quad x \neq 0. \qquad \text{(GRR)}$$

$s, \alpha \in \mathbb{C}$

$s \neq -1, -2, -3, \dots$ (uvidíme, proč)

(1) Nejprve ukážeme, že tuto rovnici lze psát ve tvaru „vlastní vektor a vlastní číslo s vahou", tj. ve tvaru

$$Ty = \lambda\rho y \qquad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \text{ a vhodnou váhu } \rho,$$

přičemž Ty má tvar diferenciálního výrazu v samoadjungovaném tvaru, tj. $Ty = (-py')'$.

Tedy

$$(-py')' = \lambda\rho y \qquad p \neq 0$$

$$-p'y' - py'' - \lambda\rho y = 0 \qquad /:(-p)$$

$$\underline{y'' + \frac{p'}{p}y' + \lambda\frac{\rho}{p}y = 0} \qquad \text{(ST)}$$

Porovnejme (ST) a (GRR), které upravíme pro $x \neq 0$:

$$y'' + \left(\frac{s+1}{x} - 1\right) y' - \frac{\alpha}{x} y = 0$$

Porovnáním lze psát například (nikoli jednoznačně, zajímá mě jedno z možných řešení); počítáme pro $x \neq 0$:

$$\frac{p'}{p} = \frac{s+1}{x} - 1 \qquad \lambda = -\alpha \qquad \frac{\rho}{p} = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(\ln|p|)' = (s+1)(\ln|x|)' - 1$$

$$|p| = |x|^{s+1} e^{-x} \cdot K \qquad\qquad \rho = \frac{p}{x}$$

$\underline{x>0}$: $\underbrace{p = x^{s+1} e^{-x}}$ (jedna z voleb) $\qquad \underbrace{\rho = x^{s} e^{-x}}$

Pro jednoduchost uvažujeme $x>0$, pak potřebujeme $\rho \in L^1(0,\infty)$, tedy nutně $\underline{s>-1}$.

Dostáváme

(GRR) $\iff$ $\underbrace{(-\underbrace{x^{s+1}e^{-x}}_{p}\, y')' = (-\alpha)\, \underbrace{x^{s}e^{-x}}_{\rho}\, y}$ (SAT)

na $(0,\infty)$

a pracujeme na $L^2_\rho(0,\infty) = L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, $s>-1$.

(2) Budeme hledat řešení (GRR) ve tvaru řady. K tomu však musíme učinit tyto úvahy:

- pro $x=0$ rovnice (GRR) degeneruje, je potřeba ji vyšetřovat separátně na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$
- můžeme však předpokládat, že tato dvě separátní řešení bude možno „slepit" v bodě $x=0$ tak, že vznikne řešení na nějakém $(-K,K)$. Pokud hledáme řešení (GRR) ve třídě takovýchto „slepitelných" řešení, lze je hledat i ve tvaru Taylorovy řady se středem v nule. S tím rizikem, že řešení v tomto tvaru nenajdeme, což by nás dovedlo k závěru, že úloha žádná „slepitelná" řešení ve tvaru řady nemá.

Za těchto podmínek položíme $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ a dosadíme do (G2R):

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}\cdot x + (s+1)\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (s+1)c_{n+1}(n+1)\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha\, x^n = 0$$

Srovnejme koeficienty:

$$x^0 : \quad (s+1)c_1 = c_0\alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_0\frac{\alpha}{s+1}$$

$$(s \neq -1 \dots)$$

$$n \geq 1 : \quad x^n : \quad c_{n+1}\left[(n+1)n + (s+1)(n+1)\right] = c_n(n+\alpha)$$

$$\underbrace{c_{n+1} = c_n\frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)}}_{\left(\text{toto v sobě zahrnuje i } c_1=c_0\frac{\alpha}{s+1} \text{ pro } n=0\right).} \qquad (s \neq -2,-3,\dots)$$

Protože každý násobek řešení (G2R) je zase jejím řešením, lze BÚNO volit základní řešení pro $c_0=1$. Dostáváme, že koeficienty řady, která definuje řešení, by musely mít tvar

$$\left.\begin{aligned} &c_0 = 1 \\ &c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+s+1}\cdot\frac{c_n}{n+1} \qquad n=0,1,2,\dots \\ &\qquad\qquad s\neq -1,-2,-3,\dots \end{aligned}\right\} \text{(KŘ)}$$

Ještě však musíme ukázat, že řada s koeficienty (KŘ) alespoň někde konverguje.

Protože řady s koeficienty typu (KŘ) tvoří jednu velmi důležitou třídu řad, budeme jim věnovat následující intermezzo.

INTERMEZZO: HYPERGEOMETRICKÉ ŘADY

Def: Hypergeometrickou řadou nazveme mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,,$$ kde koeficienty splňují:

a) existují polynomy P, Q s koeficienty u nejvyšší mocniny rovnými 1, $\operatorname{st} P = p \geq 0$, $\operatorname{st} Q = q \geq 0$, Q nemá kořeny mezi $\mathbb{N} \cup \{0\}$

b)
$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad c_0 = 1} \qquad \text{(PK)}$$

Pozn.: Pro $P(n) = Q(n) \cdot n+1$ máme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, $\left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x|$

geom. řada s kvoc. x

Ono $\frac{1}{n+1}$ je tam z historických důvodů.

Rozložme nyní P a Q na kořenové činitele v $\mathbb{C}$, a dostaneme

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1+n)(a_2+n)\cdots(a_p+n)}{(b_1+n)(b_2+n)\cdots(b_q+n)} \cdot \frac{1}{n+1} \qquad (*)$$

Tuto situaci zachytíme následujícím zápisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = {}_pF_q\left[a_1,\dots,a_p;\, b_1,\dots,b_q\right](x) \qquad \text{(KHG)}$$

(KHG) se nazývá „klasický zápis hypergeometrické řady".

Z $(*)$ ihned vidíme:

(i) $p < q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (ex) fci na celém $\mathbb{C}$

(ii) $p = q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (ex) fci na $U^1(0)$

(iii) $p > q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \infty \Rightarrow R = 0$ nedefinuje žádnou derivovatelnou funkci.

V našem intermezzu ještě budeme potřebovat úpravu (*). Za tím účelem definujme nejprve následující značení:

$$a \in \mathbb{C}, \ \text{def}: \quad (a)_0 = 1$$
$$(a)_n = \underbrace{a(a+1)\cdots(a+n-1)}_{n \text{ členů}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symbol $(a)_n$ je tzv. POCHHAMMERŮV SYMBOL, někdy též tzv. „RISING FACTORIAL". Někdy se značí i $\langle a \rangle_n$. Čteme „a Pochhammer n"
nebo „a dole n".

Všimněte si, že máme: $(1)_n = n!$. Platí též $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$

S tímto značením upravme (*):

$$c_n = \frac{(a_1+n-1)(a_2+n-1)\cdots\cdots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)(b_2+n-1)\cdots(b_q+n-1)} \cdot \frac{1}{n} c_{n-1} =$$

$$= \frac{[(a_1+n-1)(a_1+n-2)]\cdots\cdots[(a_p+n-1)(a_p+n-2)]}{[\underbrace{(b_1+n-1)(b_1+n-2)}]\cdots\cdots[(b_q+n-1)(b_q+n-2)]} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}} \cdot c_{n-2} =$$

v dalších krocích vznikne

$$\underbrace{(b_1+n-1)(b_1+n-2)\cdots(b_1)}_{(b_1)_n}$$

půjde k $\dfrac{1}{n!}$

$$= \frac{(a_1)_n \cdots\cdot (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots\cdot (b_q)_n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{c_0}_{=1} = \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_n} \cdot \frac{1}{n!}$$

Dostáváme tedy konečně explicitní vyjádření hypergeometrické řady

$$\boxed{{}_pF_q[a_1,\dots,a_p; b_1,\dots,b_q](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_n} \cdot \frac{x^n}{n!}} \qquad \text{(Fin)}$$

Nyní vynikají ony historické důvody proč bylo v (Pk) na straně 70 ono $\frac{1}{n+1}$: nejjednodušší hypergeometrickou řadou je ${}_0F_0[;](x)$.

Podle (Fin) je
$$ {}_0F_0[;](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x . $$

Ú Úkoly:

- ${}_0F_1[;\tfrac{1}{2}]\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \cos x$; Řada vlevo má $p=0, q=1 \Rightarrow p<q+1 \Rightarrow$ řada definuje hladkou (a holomorfní) fci v $\mathbb{C}$.

Řešení:
$$ {}_0F_1[;\tfrac{1}{2}]\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \cdot \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n $$
$$ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \underbrace{\frac{1}{n!\, 4^n\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}}_{\frac{2^n}{n!\,4^n\,\underbrace{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))}_{(2n)!/(2\cdot 4\cdots 2n)}} = \frac{1}{(2n)!}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} $$
cbd.

- $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\, {}_1F_1[\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}](-x^2) \underset{\text{pro } x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \operatorname{erf}(x)$; řada vlevo má ovšem smysl $\forall x \in \mathbb{C}$.

Velká třída funkcí (elementárních i neelementárních) se dá vyjádřit ve tvaru hypergeometrické řady.

— KONEC INTERMEZZA O HYPERGEOMETRICKÝCH ŘADÁCH.

Zpět ke (GRR). Jejím řešením je řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{(n+s+1)} \cdot \frac{1}{n+1} c_n \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Jde tedy o hypergeometrickou řadu pro $p=1$, $q=1$, tj. $p < q+1$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{{}_1F_1[\alpha; s+1](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$

Otázka: Kdy je řešení ${}_1F_1[\alpha, s+1](x)$ polynomem?

Odpověď: Právě tehdy, když má řada vpravo jen konečný počet členů

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha)_k = 0 \quad \forall k > n.$

Potom řada vpravo dává polynom stupně n.

Ale $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+k-1)$

Tj. pro $\boxed{\alpha = -n}$ dostanu to, co chci dostat: $(\alpha)_k = 0 \Leftrightarrow k > n$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definice: Laguerrův polynom řádu s a stupně n je polynom, definovaný pro $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$ takto

$$\boxed{L_n^s(x) := \frac{(s+1)_n}{n!}\, {}_1F_1[-n, s+1](x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Poznámky:

a) $L_n^s(x)$ řeší (GRR) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pokud v ní položíme $\alpha = -n$.

b) S odvoláním na Větu (SAT) provedeme následující restrikce:

- Uvažujeme $x > 0$, tj. $x \in (0, \infty)$
- Uvažujeme $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$, a položíme $\rho(x) = x^s e^{-x}$

Pak $\rho > 0$ na $(0,\infty)$, $\rho \in C(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$

$\Rightarrow \rho$ je dobrá váha

- uvažujeme tedy prostor $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$ ... Hilbertův.
- $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Potom (GRR) lze psát v samoadjungovaném tvaru (viz (SAT), str. 68)

$$\underbrace{Ty = n\rho y}, \qquad \text{(SAT)}$$

kde $Ty = -(py')'$, $p(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$.

> Potom $n = 0,1,2,\dots$ jsou vlastní čísla T s vahou ρ (na $L^2_\rho(0,\infty)$) a jim odpovídající vlastní funkce jsou Laguerrovy polynomy L^α_n.

c) Podle výpočtu na str. 64 tvoří Laguerrovy polynomy (pro pevné $\alpha > -1$ a pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) OG systém polynomů v $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$. Mj. tedy existuje rekurentní vzorec pro jejich vygenerování – ten odvodíme dále.

d) Otázkou v této chvíli zůstává jen to, zda jsou Laguerrovy polynomy úplným systémem, tj. zda každá funkce z $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$ lze napsat ve tvaru $\sum_0^\infty c_n L^\alpha_n(x)$. Odpověď je ANO. Důkaz je možno nalézt ve skriptech Čižák a kol.: MA pro fyziky V, Věta 41 (str. 196).

Na závěr ukážeme některé důležité vlastnosti Laguerr. polynomů

① Tzv. explicitní vyjádření

Tvrzení:
$$\boxed{L^\alpha_n(x) = \frac{1}{n!}\, x^{-\alpha} e^{x} \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)}} \qquad \text{(E)}$$

Pozn.: • Odtud: $L_0^{s}(x) = x^{-s} e^{x}\, x^{s} e^{-x} = 1$

$$L_1^{s}(x) = x^{-s} e^{x} \left(x^{s+1} e^{-x}\right)' = x^{-s} e^{x} (s+1) x^{s} e^{-x} + x^{-s} e^{x} x^{s+1} (-e^{-x})$$

$$= (s+1) - x \quad \text{atd.} \ldots$$

• Tvar (E) má velký význam při výpočtech integrálů typu $\int_0^\infty L_m^{s}(x) f(x)\, dx$, protože umožňuje použití per partes.

(2) Dokážeme (E). Upravíme rovnici (GRR):

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0 \qquad (A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x^{s+1} e^{-x} y'\right)' = \alpha x^{s} e^{-x} y$$

Tuto rovnost označíme jako GRR$(y, s+1, \alpha)$

Nyní zderivujeme (A)

$$x y''' + y'' + (s+1-x) y'' - y' - \alpha y' = 0$$

$$x y''' + (s+2-x) y'' - (\alpha+1) y' = 0$$

to je GRR$(y', s+2, \alpha+1)$

Pokud tedy (A) zderivujeme $(m-1)$krát, dostaneme GRR$(y^{(m-1)}, s+m, \alpha+m-1)$ jež ekvivalentní tvaru

$$\Big(\underbrace{x^{s+m} e^{-x} y^{(m)}}_{=:\, V_m}\Big)' = (\alpha+m-1) \underbrace{x^{s+m-1} e^{-x} y^{(m-1)}}_{\Rightarrow\, V_{m-1}}$$

Tedy $V_m' = (\alpha+m-1) V_{m-1} \quad \Big/\, '$

$$V_m'' = (\alpha+m-1) V_{m-1}' = (\alpha+m-1)(\alpha+m-2) V_{m-2}$$

Postupně:

$$V_m^{(m)} = (\alpha)_m V_0 = (\alpha)_m x^{s} e^{-x} y$$

Tedy
$$\left(x^{s+n} e^{-x} y^{(n)}\right)^{(n)} = (\alpha)_n x^s e^{-x} y$$
$$\Downarrow \quad \boxed{\text{pro } \alpha = -n}$$

$$\underline{y = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x} y^{(n)}\right)^{(n)}} \qquad \text{(B)}$$

Pokud je $\alpha = -n$, je řešením L^s_n, což je polynom stupně n. Jeho n-tá derivace je tedy konstanta, $(L^s_n)^{(n)} = n! \cdot \underbrace{\text{koeficient u } x^n}_{a_n}$

Je ovšem $L^s_n(x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$, tedy $a_n = \frac{\cancel{(s+1)_n}}{n!} \frac{(-n)_n}{\cancel{(s+1)_n}} \cdot \frac{1}{n!}$

Proto $(L^s_n)^{(n)} = \frac{(-n)_n}{n!}$

Tedy po dosazení do (B):

$$L^s_n(x) = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x} \frac{(-n)_n}{n!}\right)^{(n)}$$

tedy
$$L^s_n(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} \quad \text{cbd.} \qquad \text{(C)}$$

2 Rekurentní vzorec pro $L^s_n(x)$

Vyjdeme z (C):
$$L^s_n(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \underbrace{\left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:E_n}$$

Pak
$$E_{n+1} = \left(\left(x^{s+n+1} e^{-x}\right)'\right)^{(n)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivuj} \\ \text{uvnitř}}}{=} (s+n+1)\underbrace{\left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}}_{E_n} - \underbrace{\left(x^{s+n+1} e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:I_n} \qquad \text{(D)}$$

Naším cílem je nyní vyjádřit I_n pomocí E_n.

$$I_n = \left(x \cdot x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n-k)} =$$

$$= [\text{je nenulové jen pro } k=0,1] = x\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)} + n\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}$$

$$= xE_n + n\underbrace{\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}}_{I_{n-1}}.$$

tj.

$$\underline{I_n = xE_n + nI_{n-1}} \qquad (E)$$

Vezměme nyní (D) pro $n-1$:

$$E_n = (s+n)E_{n-1} - I_{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{I_n = xE_n + n(s+n)E_{n-1} - nE_n}_{\text{dosaď do (D):}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (s+n+1)E_n - xE_n - n(s+n)E_{n-1} + nE_n$$

$$xE_n = (s+2n+1)E_n - E_{n+1} - n(s+n)E_{n-1} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{n!}x^{-s}e^{x}$$

$$\boxed{xL_n^s(x) = (s+2n+1)L_n^s(x) - (n+1)L_{n+1}^s(x) - (s+n)L_{n-1}^s(x)}$$

Hledaný rekurentní vzorec.
Protože už vím $L_0^s = 1$, $L_1^s = (s+1) - x$,
mohu vygenerovat všechna L_n^s.

③ Normy.

Víme (viz str. 66), že

$$\|\varphi_{n+1}\|^2_{2\rho} = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|^2_{2\rho} \qquad n = 1, 2, \dots$$

pokud

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}.$$

Zde tedy $A_m = -(m+1)$, $B_m = -(s+m)$, tedy

$$\|L^s_{m+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{s+m+1}{m+1}\|L^s_m\|^2_{2,\rho} \qquad m=1,2,3,\dots$$

Máme $\|L^s_0\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty 1 \cdot x^s e^{-x} = \Gamma(s+1)$

$$\|L^s_1\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty ((s+1)-x)^2 x^s e^{-x} = (s+1)^2\Gamma(s+1) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)$$
$$= (s+1)\Gamma(s+2) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)$$
$$= \Gamma(s+3) - (s+1)\Gamma(s+2)$$
$$= (s+2)\Gamma(s+2) - (s+1)\Gamma(s+2) = \Gamma(s+2)$$

a rekurencí

$$\|L^s_m\|^2_{2,\rho} = \frac{s+m}{m}\cdot\frac{s+m-1}{m-1}\cdot \dots \cdot \frac{s+2}{2}\cdot \underbrace{\|L^s_1\|^2_{2,\rho}}_{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{m!}\Gamma(s+m+1)$$

platí i pro $m=0,1$

$$\Rightarrow \boxed{\|L^s_m\|^2_{2,\rho} = \frac{1}{m!}\Gamma(s+m+1) \qquad \forall m=0,1,2\dots}$$

(4) Tzv. vytvořující funkce

Def. Vytvořující funkcí pro daný systém $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$, $\varphi_m = \varphi_m(x)$, nazveme takovou funkci $F = F(x,t)$, která je analytická v okolí $t=0$ (pro všechna pevná x) a její rozvoj do Taylorovy řady podle t v $t \in \mathcal{U}(0)$ generuje koeficienty $\varphi_m(x)$. Tedy:

$$F(x,t) = \sum_{m=0}^\infty \varphi_m(x)t^m.$$

Zde tedy hledáme takovou F, pro kterou $F(x,t) = \sum_{m=0}^\infty L^s_m(x)t^m$.

Budeme postupovat tak, že rozvineme vhodnou funkci $f \in L^2_\rho(0,\infty)$ s parametrem t do řady v Laguerrových polynomech. Tím dostaneme řadu typu $\sum_{m=0}^\infty c_m(t)L^s_m(x)$ a budeme směřovat k tomu, aby $c_m \approx t^m$.

Teorie říká, že pokud $f \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ [a pokud $L^s_n(x)$ je úplný v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$], tak $\exists c_n \in \mathbb{C}$ tak, že

$$c_n = \frac{1}{\|L^s_n\|^2_{2,\rho}} \left(f, L^s_n\right)_{2,\rho}, \qquad \text{že} \qquad f \underset{\text{rovnost v } L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)}{=} \sum c_n L^s_n$$

(to plyne z obecné teorie Fourierových řad).

Budeme rozvíjet funkci e^{-ax} (poté budeme hledat $a = a(t)$).

(i) Ověření konv.: pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je $e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$?

tj. když
$$\int_0^\infty \left(e^{-ax}\right)^2 x^s e^{-x}\,dx < \infty$$
$$\parallel$$
$$\int_0^\infty x^s e^{-(2a+1)x}\,dx < \infty \quad \text{pro } s > -1, \text{ pokud } 2a+1 > 0$$
$$\underline{a > -\tfrac{1}{2}}$$

Pro tato a spočteme

$$c_n = \frac{1}{\|L^s_n\|^2_{2,\rho}} \int_0^\infty e^{-ax} x^s e^{-x} L^s_n(x)\,dx = \left[\text{použij explicitní vyjádření } L^s_n\right]$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \cancel{x^s} \cancel{e^{-x}} \left(\frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{x^{-s}} \cancel{e^{x}} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} dx = \left[\begin{array}{l} n\times \text{ per partes} \\ \text{při každém přibude} \\ \text{faktor } ,,-(-a)\text{"} \end{array}\right]$$

hraniční členy $= 0$

$$= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ax} x^{s+n} e^{-x}\,dx}_{(a+1)x = y} =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{s+m} \frac{1}{a+1}\, dy =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \cdot \frac{1}{(a+1)^{s+m+1}}\, \Gamma(s+m+1) = \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m$$

Odtud hned dostáváme:

$$\boxed{e^{-ax} \overset{s.v.}{=} \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{a}{a+1}\right)^m L_m^s(x) \qquad a > -\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

Pozn.
- Obecně platí rovnost ve smyslu prostoru, ve kterém byla odvozena, tj. ve $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, neboli s.v. Pokud jsou však na obou stranách spojité funkce (tj. například pokud řada vpravo konverguje alespoň lokálně stejnoměrně v $\mathbb{R}$), platí rovnost ve všech $x \in \mathbb{R}$.
- Dosazením $a = 0$ do $(*)$ vypadnou vpravo všechny členy pro $m \geq 1$ a dostaneme

$$1 = L_0^s(x), \text{ což je milé.}$$

- Pro $a = 1$ dá $(*)$

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{m=0}^\infty \frac{L_m^s(x)}{2^m}$$

speciálně pro $s = 0$ máme $\quad e^{-x} = \sum_{m=0}^\infty \frac{L_m^0(x)}{2^{m+1}}$.

(ii) Druhý krok: sestavení vytvořující funkce.

Položme $t = \frac{a}{a+1}$ v $(*)$. $\qquad \frac{dt}{da} = \frac{1}{(a+1)^2} > 0$ Prosté.

$$\Updownarrow$$

$$a = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{1}{a+1} = 1 - t$$

Platí $a > -\frac{1}{2} \iff t \in (-1,1)$

Úpravou (*) máme

$$(a+1)^{s+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

$$\Big\downarrow \; a \to t$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\, t^n \qquad t \in (-1,1)$$

Vytvořující fce pro Laguerrovy polynomy.

═══

V tabulce „Ortogonální systémy polynomů" v dodatku uvádíme tyto systémy polynomů

Laguerrovy, Hermiteovy, Legendreovy,
Čebyševovy, Gegenbauerovy.

Vždy uvádíme
- generující rovnici
- vyjádření řadou (4-6)
- explicitní tvar
- rekurentní vztah a velikosti norem
- vytvořující funkci

a zejména
- prostor, ve kterém tvoří bázi.

TO JE VŠE.

[signature], 16.5.2017
revid. 7.5.2019