

6.1. Výrazy u samoadjungovaném brane

Mějme

$$L(y) = \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(k)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y \in C^n(a,b), \quad y = y(x) \\ -\infty < a < b < +\infty \\ p_k \in C(a,b), \quad p_n \neq 0 \text{ na } (a,b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} y, p_k \\ \text{cpl. fce} \end{array}$$

Nazýváme je lineární diferenciální výraz (LDV)  $n$ -tého řádu.

Pro pojem lineární diferenciální operátora (LDO)  $n$ -tého řádu budeme rovněž LDV + definiční obor

$$L = L \quad \& \quad \mathcal{D}(L), \quad \text{tj.} \quad L = L / \mathcal{D}(L).$$

Budeme chtít, aby  $L$  byl kvazidefinovaný v  $H$  (Hilbertiovo), tj.  $\mathcal{D}(L) \neq H, \overline{\mathcal{D}(L)} = H$ .

Typicky budeme mít (viz předch. kapitola)

$$\mathcal{D}(L) = (H \cap C^n(a,b)) + \text{okrajové podm.}$$

Přitom říkáme, že symetrický operátor je nulovou podmínkou samoadjungovanost.

U dalšího se budeme zabývat hledáním dalších nutných podmínek samoadjungovanosti resp. symetrie. Typicky budeme pracovat s prostorem

$$C_{cpt}^\infty(a,b) = \{ f \in C^\infty(a,b), \exists K \subset (a,b) \text{ kompaktní, } f \equiv 0 \text{ na } (a,b) \setminus K \}$$

výhodou tohoto prostoru je to, že při per partes pro funkci  $f \in C_{cpt}^\infty(a,b)$  jsou hraniční členy nulové, a tedy se nemusíme zabývat okrajovými podmínkami.

① Definujme tzv. adjungovaný výraz k  $L(y)$ :

$$L^*(y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\overline{p_k(y)}) y^{(k)}$$

**Lemma** K danému  $L$  je  $L^*$  jediný lineární diferenciální výraz, pro který

$$(L(y), z) = (y, L^*(z)) \quad \forall y, z \in C_{cpt}^\infty(a,b)$$



ⓐ  $E_1 = \frac{i}{2} ((py)') + py' = \frac{i}{2} (p'y + 2py') = ipy' + \frac{i}{2} p'y$ . Pro  $p=1$ :  $iy'$

$E_2 = (py)'$  ... Tzv. diferenciální rovnice 2. řádu v samostat. tvaru

**6.2** Ortogonalní báze v  $L^2$  složené z polynomů

Uvažujme

$H = L^2_p(a,b) := \{f: (a,b) \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b \rho |f|^2 < \infty, \text{ kde } \rho: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ je tzv.}$

máha, splňující  $\rho > 0, \rho \in C, \rho \in L^1\}$

Pozn:  $\rho \in C$  se nikdy nespočítá.

Pro ukázaní, že  $L^2_p(a,b)$  je Hilbertovo se skalárním součinem

$(y,z)_{2,p} := \int_a^b \rho y \bar{z}$

a normou

$\|y\|_{2,p}^2 = \int_a^b \rho |y|^2$ .

Pozn: Proč uvažujeme  $L^2_p$ ? Například proto, že chceme pracovat s polynomy na  $\mathbb{R}$ . Vítám řádný polynom  $P$  nemá problém  $L^2(\mathbb{R})$ . Ale všechny polynomy jsou problémy  $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$ .

Uvažujme nyní  $T: \mathcal{D}(T) \rightarrow L^2_p$ ;  $\overline{\mathcal{D}(T)} = L^2_p$ , symetrický na  $\mathcal{D}(T)$ .

Vítám  $\mathcal{D}(T)$  necht' je husté, že  $\mathcal{D}(T) \subset L^2_p \cap L^2$ .

Definujme vlastní číslo  $\lambda$  a vl. fci  $y$  operátoru  $T$ , a vektor  $\rho$ :  $Ty = \lambda \rho y$ .

Uvažujme

$(Ty, y)_2 = \int_a^b \rho (\lambda y)^2 = \lambda \int_a^b \rho |y|^2 = \lambda \|y\|_{2,p}^2$

|| se. součin hermitovský, s normou hermitovskou

$(y, Ty)_2 = \dots \bar{\lambda} \|y\|_{2,p}^2$ , ano,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pokud  $y \in \mathcal{D}(T)$ .

Dále, pro  $Ty_j = \lambda_j p y_j \quad j=1,2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ , máme

$$\lambda_1 (y_1, y_2)_{2,p} = \lambda_1 (y_1 p, y_2)_2 = (Ty_1, y_2)_2 = (y_1, Ty_2) = \dots = \lambda_2 (y_1, y_2)_{2,p}$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \Rightarrow \end{matrix} (y_1, y_2)_{2,p} = 0 \Rightarrow \underline{\text{kolmé v } L^2_p}$$

Léme: Množina n.l.c. a valem a "ok. součin bez váhy".

Dokládáme OG systém v  $L^2_p$ .

Obecně v tomto případě není k dispozici

- výčet a početnost nplémou OG fci
- výčet a výskyt váhy (musí se dokázat případ od případu)

Line nšak, je generalizace OG množiny, a také máme k dispozici Weierstrassovu větu a tom, je polynom jím kvád v  $C(K)$ , (pokud  $K$  je kompaktní), která je nase kvád v  $L^2_p(K)$ . Proto se dá rovnou kázat se OG systému polynomů v  $L^2_p$ .

Pro  $L^2_p(K)$  platí stejně výhled OG množiny a Weierstrassovy věty. Na nekompaktních se ovšem výhled OG množiny dohazuje obříme.

Následující věta může být trochu překvapivá.

**Věta**

$L^2_p(a,b)$ ;  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $p$  kladná váha, je  $\|p\|_{2,p} < \infty$   $\forall p$  polynom.

Existují  $\{\varphi_n\}$  systém reálných OG polynomů v  $L^2_p$ ;  $\mathcal{M}\varphi_n = n$ ,  $n=0,1,2,3,\dots$

Existují  $\forall m \in \mathbb{N} \exists A_m, B_m, C_m \in \mathbb{R}$ , je

$$x\varphi_m = A_m\varphi_{m+1} + C_m\varphi_m + B_m\varphi_{m-1}$$

Důk:  $m=0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{c}{x_0}$ , potom  $x\varphi_0 = cx = \frac{c}{a} \underbrace{(ax+b)}_{\varphi_1} - \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{x_0} = \frac{c}{a}\varphi_1 - \frac{b}{a}\varphi_0$  ( $a \neq 0$ )

①  $m \in \mathbb{N}$ :  $\mathcal{M}(x\varphi_m) = m+1 \Rightarrow \exists \gamma_{m,k} \in \mathbb{R}$

$$x\varphi_m = \sum_{k=0}^{m+1} \gamma_{m,k} \varphi_k \quad (*)$$

(platí obecně pro jakékoli polynom,  $\mathcal{M}\varphi_m = m$ , nemají již OG - nkompletní 2)

$$\langle \cdot, \varphi_j \rangle_{2,p} \quad \forall j=0, \dots$$

$$(\langle x\varphi_m, \varphi_j \rangle)_{2,p} = \sum_{k=0}^{m+1} \underbrace{\gamma_{m,k}}_{\delta_{kj} \|\varphi_k\|_{2,p}^2} (\varphi_k, \varphi_j)_{2,p} = \gamma_{m,j} \|\varphi_j\|_{2,p}^2 \quad j \leq m+1 \quad (*)$$

(= 0 pro  $j > m+1$ )

$\gamma_{m,j} = 0$  pro  $j > m+1$ : suma vpravo je rovna nule pro  $j > m+1$ , nebo  $\varphi_k \perp \varphi_j$  pro  $k \in \{0, \dots, m+1\}$  a  $j > m+1$ . Ostatně sama definiceové sumy lze chápat tak, že  $\gamma_{m,k} = 0$  pro  $k > m+1$  (a brát onu sumu formálně jako  $\sum_0^{\infty}$ )

Díky rekurzi  $\varphi_m$  je však

$$(\langle x\varphi_m, \varphi_j \rangle)_{2,p} = (\langle \varphi_m, x\varphi_j \rangle)_{2,p} = (\langle \varphi_m, \sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} \varphi_p \rangle)_{2,p} = \sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} (\langle \varphi_m, \varphi_p \rangle)_{2,p}$$

= 0  $\forall m > j+1$  neobjektivně  
divodu

Tato suma je však dle (\*) stále rovna  $\gamma_{m,j} \|\varphi_j\|_{2,p}^2 \Rightarrow \underline{\gamma_{m,j} = 0 \quad \forall j < m-1}$

Celkem  $\gamma_{m,j} = 0 \quad \forall j \neq m-1, m, m+1 \Rightarrow (*)$  se redukuje na

$$x\varphi_m = \underbrace{\gamma_{m,m-1}}_{=: B_m} \varphi_{m-1} + \underbrace{\gamma_{m,m}}_{=: C_m} \varphi_m + \underbrace{\gamma_{m,m+1}}_{=: A_m} \varphi_{m+1} \quad \boxed{\text{chod}}$$

Dom: Máte dva vektory,  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  na  $\mathbb{R}^2$   
 $a = -b$   
 $\rho$  máta  
 $na (a,b)$   
 $\Rightarrow C_m = 0 \quad \forall m$

Právě právě odvozeného rek. vzorce  $\rightarrow$  výpočet OG systému polynomů  
 výpočet jejich norm:

$$x\varphi_m = A_m \varphi_{m+1} + C_m \varphi_m + B_m \varphi_{m-1}, \quad m=1,2,3,\dots$$

a)  $A_m \neq 0$ , jinak je stupeň polynomu rovnou  $= m$ .

b) Norma vektor. vztah  $(\cdot, \varphi_{m+1})_{2,p}$ :  $(x\varphi_m, \varphi_{m+1})_{2,p} = A_m \|\varphi_{m+1}\|_{2,p}^2$

c) Norma vektor. vztah  $(\cdot, \varphi_{m-1})_{2,p}$ :  $(x\varphi_m, \varphi_{m-1})_{2,p} = B_m \|\varphi_{m-1}\|_{2,p}^2$

"  
 $(x\varphi_{m-1}, \varphi_m)_{2,p} = A_{m-1} \|\varphi_m\|_{2,p}^2$

$$\Rightarrow A_{n-1} \|\varphi_n\|_{2,p}^2 = B_n \|\varphi_{n-1}\|_{2,p}^2 \quad A_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B_n \neq 0 \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\varphi_{n+1}\|_{2,p}^2 = \frac{B_{n+1}}{A_n} \|\varphi_n\|_{2,p}^2 \quad n = 1, 2, \dots}$$

Okaz, více pro normy.

$\|\varphi_0\|, \|\varphi_1\|$  je třeba znát, od  $\varphi_2$  počítá.

Literatura pro normy - operátory

KREYSZIG: Introduction FA with applications.

Bonus: Děkár konvenční a formální na předchozím větě:

2 vlastnosti polynomi operátora máme

$$\varphi_n(-x) = \sum_{k=0}^n \beta_{n,k} \varphi_k(x)$$

$$/ (\cdot, \varphi_j(x))_{2,p}$$

$$j = 0, \dots, n$$

(jinak je součin = 0)

$$(\varphi_n(-x), \varphi_j(x))_{2,p} = \beta_{n,j} \|\varphi_j\|_{2,p}^2$$

$$\int_{-a}^a \varphi_n(-x) \varphi_j(x) \rho(x) dx = \int_a^{-a} \varphi_n(t) \varphi_j(-t) \rho(t) dt = (\varphi_n(x), \varphi_j(-x))_{2,p}$$

$$\left[ \begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right]$$

$$= (\varphi_n(x), \sum_{m=0}^j \beta_{j,m} \varphi_m(x)) = 0 \quad \text{pro } n > j.$$

$\Downarrow$

Vše rovná se  
0 pro  $j = n$ .

$$\Rightarrow \underline{\varphi_n(-x) = \beta_{n,n} \varphi_n(x)}$$

Shrneme nyní koeficienty u  $x^m$  u polynomu  $\varphi$ :

$$a_n (-x)^m = \beta_{n,m} a_n x^m \Rightarrow \beta_{n,m} = (-1)^m$$

$$\text{Proto } \varphi_m(-x) = (-1)^m \varphi_m(x) \Rightarrow (\varphi_m(-x))^2 = (\varphi_m(x))^2$$

tj  $|\varphi_m|^2$  je sudá.

Zároveň,

$$x\varphi_m = A_m \varphi_{m+1} + C_m \varphi_m + B_m \varphi_{m-1} \quad / (\cdot, \varphi_m)_{2,p}$$

$$(x\varphi_m, \varphi_m) = C_m \|\varphi_m\|_{2,p}^2$$

a "

$$\int x |\varphi_m|^2 \rho(x) dx = 0 \quad \text{nebot } x \text{ lichá, } |\varphi_m|^2 \rho \text{ sudá}$$

}  $\Rightarrow C_m = 0$   
dtd.

□

### 6.3. Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů

Uvažujme tzv. Gaussovu redukovanou rovnici

$$xy'' + (\Delta + 1 - x)y' - \alpha y = 0, \quad x \neq 0. \quad (\text{GRR})$$

$$\Delta, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\Delta \neq -1, -2, -3, \dots \quad (\text{uvídneme, proč})$$

- ① Nejprve ukážeme, že tuto rovnici lze psát ve tvaru „eigení rovnice a eigení číslo s váhou“, tj. ve tvaru

$$Ty = \lambda \rho y \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \text{ a vhodnou váhu } \rho,$$

přičemž  $Ty$  má tvar diferenciálního výrazu v samoadjungovaném tvaru, tj.  $Ty = (-\rho y')'$ .

Tedy

$$(-\rho y')' = \lambda \rho y \quad \rho \neq 0$$

$$-\rho' y' - \rho y'' - \lambda \rho y = 0 \quad /: (-\rho)$$

$$\underline{y'' + \frac{\rho'}{\rho} y' + \lambda \frac{\rho}{\rho} y = 0} \quad (\text{ST})$$

Porovnejme (ST) a (GRR), které upravíme pro  $x \neq 0$ :

$$y'' + \left(\frac{5+1}{x} - 1\right)y' - \frac{\alpha}{x}y = 0$$

Porovnáme se s příkladem (nikoli jednovácně, zejména má jedno a má více řešení); počítáme pro  $x \neq 0$ :

$$\frac{p'}{p} = \frac{5+1}{x} - 1$$

$$\lambda = -\alpha$$

$$\frac{p}{p} = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln|p|)' = (5+1)(\ln|x|)' - 1$$

$$\Downarrow$$

$$|p| = |x|^{6+1} e^{-x} \cdot k$$

$$p = \frac{k}{x}$$

$$\underline{x > 0}: \quad \underline{p = x^{6+1} e^{-x}} \quad (\text{jedna z voleb})$$

$$\underline{p = x^{\Delta} e^{-x}}$$

Pro jednoduchost uvažujeme  $x > 0$ , pak potřebujeme  $p \in L^1(0, \infty)$ , tedy musíme  $\Delta > -1$

Dobýváme

$$\text{(GRR)} \Leftrightarrow \underbrace{(-x^{\Delta+1} e^{-x} y)'}_p = \underbrace{(-\alpha) x^{\Delta} e^{-x} y}_p \quad \text{(SAT)}$$

na  $(0, \infty)$

$$\text{a pracujeme na } L^2_p(0, \infty) \approx L^2_{x^{\Delta} e^{-x}}(0, \infty), \quad \Delta > -1.$$

② Budeme hledat řešení (GRR) ve tvaru řady. K tomu však musíme učinit tyto úvahy:

- pro  $x = 0$  rovnice (GRR) degeneruje, je potřeba ji upřesnit odděleně na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$
- můžeme však předpokládat, že jako dvě separátní řešení bude mít „šlepit“ v bodě  $x = 0$  tak, že vznikne řešení na nějakém  $(-k, k)$ . Pokud hledáme řešení (GRR) ve tvídě takovýchto „šlepitelných“ řešení, lze je hledat i ve tvaru Taylorovy řady se středem v nule. S tím riskem, že řešení v tomto tvaru nemáme, čím by nás dovedlo k závěru, že úloha řádná „šlepitelná“ řešení ve tvaru řady nemá.

La této podmínky položíme  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  a dosadíme do (G2L):

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} \cdot x + (\lambda+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1)n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)c_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha x^n = 0$$

Shrneme koeficienty:

$$x^0 : (\lambda+1)c_1 = c_0 \alpha \Rightarrow c_1 = c_0 \frac{\alpha}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1, \dots)$$

$$n \geq 1 : x^n : c_{n+1} [(n+1)n + (\lambda+1)(n+1)] = c_n (\lambda + \alpha)$$

$$c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(\lambda+n+1)} \quad (\lambda \neq -2, -3, \dots)$$

(toto v době psaní je  $c_1 = c_0 \frac{\alpha}{\lambda+1}$  pro  $n=0$ ).

Prove každý násobek řešení (G2L) je zase jejím řešením, lze BÚNO volit základní řešení pro  $c_0 = 1$ . Dodáváme, že koeficienty řady, která definuje řešení, by musely mít tvar

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_{n+1} &= \frac{n+\alpha}{n+1} \cdot \frac{c_n}{\lambda+n+1} \end{aligned} \right\} (K\bar{r}) \quad \begin{aligned} n &= 0, 1, 2, \dots \\ \lambda &\neq -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Jště však musíme ukázat, že řada s koeficienty  $(K\bar{r})$  alespoň někde konverguje.

Prove řady s koeficienty typu  $(K\bar{r})$  totiž je tomu velmi důležitou vidou řad, budeme jim věnovat následující intermezzo.

## INTERMEZZO: HYPERGEOMETRICKÉ ŘADY

Def: Hypergeometrický řád je mocninový mocninný řád tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ kde koeficienty splňují:}$$

a) existují polynomy  $P, Q$  s koeficienty s nejvyšší mocninou rovnými 1,  
 $M P = p \geq 0, M Q = q \geq 0, Q$  nemá kořeny mezi  $N \setminus \{0\}$

b)

$$\boxed{\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{P(m)}{Q(m)} \cdot \frac{1}{m+1}, \quad m=0,1,2,\dots \quad c_0=1} \quad (\text{PK})$$

Pos: Pro  $P(m) = Q(m) \cdot m+1$  máme  $\frac{c_{m+1}}{c_m} = 1, \quad \left| \frac{c_{m+1} x^{m+1}}{c_m x^m} \right| = |x|$

Ono  $\frac{1}{m+1}$  je tam z historické důvody.

geom. řada.  
 $\rightarrow$  kvoc.  $x$

Rozeberme nyní  $P$  a  $Q$  na kvadratické činitele v  $\mathbb{C}$ , a dostaneme

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{(a_1+m)(a_2+m)\dots(a_p+m)}{(b_1+m)(b_2+m)\dots(b_q+m)} \cdot \frac{1}{m+1} \quad (*)$$

Tuto situaci rozepíšeme následujícím zápisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = {}_pF_q [a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q] (x) \quad (\text{KHG})$$

(KHG) se nazývá „klasický zápis hypergeometrické řady“.

z (\*) ihned vidíme:

(i)  $p < q+1 \Rightarrow \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \sum c_n x^n$  definiuje holomorfní  
 $(\infty)$  fci na celém  $\mathbb{C}$

(ii)  $p = q+1 \Rightarrow \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$  definiuje holomorfní  
 $(\infty)$  fci na  $U^1(0)$

(iii)  $p > q+1 \Rightarrow \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| \rightarrow \infty \Rightarrow R = 0$  nedefinuje žádnou derivovatelnou  
funkci.

V našem interresu ještě budeme pracovat s rovnicí (\*). Za tím účelem definujeme nejprve následující označení:

$$a \in \mathbb{C}, \text{ def: } (a)_0 = 1$$

$$(a)_m = \underbrace{a(a+1)\cdots(a+m-1)}_{m \text{ členů}, m \in \mathbb{N}}.$$

Symbol  $(a)_m$  je tzv. POCHHAMMERŮV SYMBOLE, někdy též tzv. „RISING FACTORIAL“. Někdy se značí i  $\langle a \rangle_m$ . Čtení „a pochhammer m“ nebo „a dole m“.

Všimněte si, že platí:  $(1)_m = m!$ . Platí též  $(a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$

V tomto označení upravíme (\*):

$$c_m = \frac{(a_1+m-1)(a_2+m-1)\cdots(a_p+m-1)}{(b_1+m-1)(b_2+m-1)\cdots(b_q+m-1)} \cdot \frac{1}{m} c_{m-1} =$$

$$= \frac{[(a_1+m-1)(a_1+m-2)]\cdots[(a_p+m-1)(a_p+m-2)]}{\underbrace{[(b_1+m-1)(b_1+m-2)]\cdots[(b_q+m-1)(b_q+m-2)]}_{m \text{ dalších kroků využijeme}} \cdot \underbrace{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1}}_{\text{půjde k } \frac{1}{m!}} \cdot c_{m-2} =$$

$$\frac{(a_1)_m \cdots (a_p)_m}{(b_1)_m \cdots (b_q)_m} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \underbrace{c_0}_{=1} = \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_m}{\prod_{k=1}^q (b_k)_m} \cdot \frac{1}{m!}$$

Dodáváme tedy konečně explicitní vyjádření hypergeometrické řady

$$\boxed{{}_pF_q [a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_n}{\prod_{k=1}^q (b_k)_n} \cdot \frac{x^n}{n!}} \quad (\text{Fin})$$

Nyní vytkaj'ony historické divočky proč bylo  $s$  (pk) na straně  $\neq 0$   
 ono  $\frac{1}{n+1}$ : nejjednodušší hypergeometrická řada je  ${}_0F_0[;](x)$ .

Podle (Fin) je

$${}_0F_0[;](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

① Zkusle:

•  ${}_0F_1[; \frac{1}{2}](-\frac{x^2}{4}) = \cos x$ ; Řada vlevo má  $p=0, q=1 \Rightarrow p < q+1 \Rightarrow$  řada  
 definuje hladkou (a holomorfní) fci v  $\mathbb{C}$ .

$$\text{Řešení: } {}_0F_1[; \frac{1}{2}](-\frac{x^2}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \cdot \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{1}{\underbrace{n! \cdot 4^n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dod.}$$

$$\frac{2^n}{n! \cdot 4^n \cdot \underbrace{(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))}_{(2n)! / (2 \cdot 4 \cdots 2n)}} = \frac{1}{(2n)!}$$

•  $\frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right](-x^2) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \text{erf}(x)$ ; řada vlevo má  
 význam pouze  $\forall x \in \mathbb{C}$   
 pro  $x \in \mathbb{R}$

Velká třída funkcí (elementárních i neelementárních) se dá vyjádřit  
 ve tvaru hypergeometrické řady.

KONEC INTERMEZZA O HYPERGEOMETRICKÝCH ŘADÁCH.

Ježt ke (G22). Jijm řešením je řada  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , kde

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = \frac{n+d}{(n+d+1)} \cdot \frac{1}{n+1} c_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ježt jež 0-hypergeometrickou řadu pro  $p=1, q=1$ , tj.  $p < q+1$

$${}_1F_1[\alpha; \alpha+1](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!} \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \notin \{-1, -2, \dots\}$$

Otázka: Kdy je řešením  ${}_1F_1[\alpha; \alpha+1](x)$  polynomem?

Odpověď: Právě tehdy, kdy má řada upravo jin konečný počet členů

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, (\alpha)_k = 0 \quad \forall k > m.$$

Potom řada upravo dáva polynom stupně  $m$ .

$$\text{Ale } (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$$

Tj. pro  $\boxed{\alpha = -m}$  dostaneme to, co chceme dostat:  $(\alpha)_k = 0 \Leftrightarrow k > m$   
 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Definice: Laguerrov polynom řádu  $\alpha$  a stupně  $m$  je polynom, definovaný pro  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1$  takto

$$L_m^\alpha(x) := \frac{(\alpha+1)_m}{m!} {}_1F_1[-m, \alpha+1](x) = \frac{(\alpha+1)_m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k}{(\alpha+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Uvědomění:

a)  $L_m^\alpha(x)$  není (G22)  $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pokud  $\alpha$  má polární  $\alpha = -m$ .

b) S odvoláním na Ivan (SAT) provedeme následující restrikce:

- Uvažujeme  $x > 0$ , tj.  $x \in (0, \infty)$
- Uvažujeme  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1$ , a polární  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$

Pak  $\rho > 0$  na  $(0, \infty)$ ,  $\rho \in C(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$

$\Rightarrow \rho$  je dobrá měřka

- Uvažujeme tedy prostor  $L^2_{x^{\alpha}e^{-x}}(0, \infty) \dots$  Hilbertův.
- $\alpha = -m$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Podobně (GRR) lze psát v pomocněmagrafičném tvaru (viz (SAT), str. 68)

$$\underbrace{T y = m p y,}_{(SAT)}$$

kde  $T y = -(p y')'$ ,  $p(x) = x^{\alpha+1} e^{-x}$ .

Podobně  $m = 0, 1, 2, \dots$  jsou vlastní čísla  $T$  a vektor  $p$  (na  $L^2_{p}(0, \infty)$ ) a jim odpovídající vlastní funkce jsou Laguerroy polynomy  $L^{\alpha}_m$ .

c) Podle výpočtu na str. 64 máme totiž Laguerroy polynomy (pro  $\alpha > -1$  a pro  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) OC systém polynomů na  $L^2_{x^{\alpha}e^{-x}}(0, \infty)$ . Mají tedy existující rekurentní vzorec pro jejich vygenerování - ten odvodíme dále.

d) Ukážeme v této chvíli existenci jím to, zda jsou Laguerroy polynomy některým systémem, tj. zda každá funkce z  $L^2_{x^{\alpha}e^{-x}}(0, \infty)$  lze napsat ve tvaru  $\sum c_n L^{\alpha}_n(x)$ . Odpověď je ANO. Důkaz se máme vrátit ke str. 64 a kol: MA pro fyziky I, Věta 4.1 (str. 196).

Na závěr ukažeme některé důležité vlastnosti Laguerroy polynomů

① Tzv. explicitní vyjádření

Obatí :

$$L^{\alpha}_m(x) = \frac{1}{m!} x^{-\alpha} e^x \left( x^{\alpha+m} e^{-x} \right)^{(m)} \quad (E)$$

Pozn.: • Odhad :   $L_0^\Delta(x) = x^{-\Delta} e^x x^\Delta e^{-x} = 1$

$$L_1^\Delta(x) = x^{-\Delta} e^x (x^{\Delta+1} e^{-x})' = x^{-\Delta} e^x (\Delta+1) x^\Delta e^{-x} + x^{-\Delta} e^x x^{\Delta+1} (-e^{-x})$$

$$= (\Delta+1) - x \quad \text{ald...}$$

- Tvor (E) má velký význam při výpočtech integrální typu  $\int_0^\infty L_n^\Delta(x) f(x) dx$ , protože umožňuje rovnici per partes.

② Dokážeme (E). Myšlivně rovnici (GRR) :

$$x y'' + (\Delta+1-x) y' - \alpha y = 0 \quad (A)$$

$$\left( x^{\Delta+1} e^{-x} y' \right)' = \alpha x^\Delta e^{-x} y$$

Tuto rovnici označíme jako GRR( $y, \Delta+1, \alpha$ )

myšlivně odečteme (A)

$$x y''' + y'' + (\Delta+1-x) y'' - y' - \alpha y' = 0$$

$$x y''' + (\Delta+2-x) y'' - (\alpha+1) y' = 0$$

to je GRR( $y', \Delta+2, \alpha+1$ )

Podobně tedy (A) odečteme  $(n-1)$  krát, dostaneme GRR( $y^{(n-1)}, \Delta+n, \alpha+n-1$ )

je derivacelní tvar

$$\left( x^{\Delta+n} e^{-x} y^{(n)} \right)' = (\alpha+n-1) x^{\Delta+n-1} e^{-x} y^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow V_n = V_{n-1}$$

Tedy  $V_n' = (\alpha+n-1) V_{n-1}$

$$V_n'' = (\alpha+n-1) V_{n-1}' = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2) V_{n-2}$$

Dostupně:

$$V_n^{(m)} = (\alpha)_n V_0 = (\alpha)_n x^\Delta e^{-x} y$$

Tedy

$$\left( x^{\Delta+m} e^{-x} y^{(m)} \right)^{(m)} = (\alpha)_m x^{\Delta} e^{-x} y$$

$\Downarrow$  pro  $\alpha = -m$

$$y = \frac{1}{(-m)_m} x^{-\Delta} e^x \left( x^{\Delta+m} e^{-x} y^{(m)} \right)^{(m)} \quad (B)$$

Podobně je  $\alpha = -m$ , je řešením  $L_m^{\Delta}$ , což je polynom stupně  $m$ . Jeho  $m$ -lá derivace je tedy konstanta,  $(L_m^{\Delta})^{(m)} = m! \cdot \underbrace{\text{koeficient}}_{a_m} x^m$

Je ovšem  $L_m^{\Delta}(x) = \frac{(\Delta+1)_m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k}{(\Delta+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$ , tedy  $a_m = \frac{(\Delta+1)_m}{m!} \frac{(-m)_m}{(\Delta+1)_m} \cdot \frac{1}{m!}$

Podob  $(L_m^{\Delta})^{(m)} = \frac{(-m)_m}{m!}$

Tedy po dosazení do (B):

$$L_m^{\Delta}(x) = \frac{1}{(-m)_m} x^{-\Delta} e^x \left( x^{\Delta+m} e^{-x} \frac{(-m)_m}{m!} \right)^{(m)}$$

tedy

$$L_m^{\Delta}(x) = \frac{1}{m!} x^{-\Delta} e^x \left( x^{\Delta+m} e^{-x} \right)^{(m)} \quad \text{obd.} \quad (C)$$

## 2) Rekurentní vztah pro $L_m^{\Delta}(x)$

Vyděleme z (C):

$$L_m^{\Delta}(x) = \frac{1}{m!} x^{-\Delta} e^x \underbrace{\left( x^{\Delta+m} e^{-x} \right)^{(m)}}_{=: E_m}$$

Pak

$$E_{m+1} = \left( \left( x^{\Delta+m+1} e^{-x} \right)' \right)^{(m)} = (\Delta+m+1) \underbrace{\left( x^{\Delta+m} e^{-x} \right)^{(m)}}_{E_m} - \underbrace{\left( x^{\Delta+m+1} e^{-x} \right)^{(m)}}_{=: I_m} \quad (D)$$

$\downarrow$   
derivace  
vnějšku

Nášim cílem je nyní vyjádřit  $I_m$  pomocí  $E_m$ .

$$I_m = (x \cdot x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{(k)} (x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m-k)} =$$

$$= [\text{je nulové jen pro } k=0,1] = x(x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m)} + m(x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m-1)}$$

$$= xE_m + m \underbrace{(x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m-1)}}_{I_{m-1}}$$

tg

$$\underline{I_m = xE_m + mI_{m-1}}$$

(E)

Uděláme nyní (D) pro  $m-1$ :

$$E_m = (\Delta+m)E_{m-1} - I_{m-1}$$

$$\Rightarrow I_m = xE_m + m(\Delta+m)E_{m-1} - mE_m$$

dovádě do (D):

$$\Rightarrow E_{m+1} = (\Delta+m+1)E_m - xE_m - m(\Delta+m)E_{m-1} + mE_m$$

$$xE_m = (\Delta+2m+1)E_m - E_{m+1} - m(\Delta+m)E_{m-1} \quad / \cdot \frac{1}{m!} x^{-\Delta} e^x$$

$$xL_m^\Delta(x) = (\Delta+2m+1)L_m^\Delta(x) - (m+1)L_{m+1}^\Delta(x) - (\Delta+m)L_{m-1}^\Delta(x)$$

Hledám rekurentní vzorec.

Podíváme si nyní  $L_0^\Delta = 1$ ,  $L_1^\Delta = (\Delta+1) - x$ ,  
mohu vygenerovat všechna  $L_m^\Delta$ .

### ③ Normy

vím (viz sh. 66), že

$$\|\varphi_{m+1}\|_{2\varphi}^2 = \frac{b_{m+1}}{A_m} \|\varphi_m\|_{2\varphi}^2 \quad m=1,2,\dots$$

pokud

$$x\varphi_m = A_m\varphi_{m+1} + C_m\varphi_m + B_m\varphi_{m-1}$$

Zde tedy  $A_m = -(m+1)$ ,  $B_m = -(\Delta+m)$ , tedy

$$\|L_{m+1}^\Delta\|_{2,p}^2 = \frac{\Delta+m+1}{m+1} \|L_m^\Delta\|_{2,p}^2 \quad m=1,2,3,\dots$$

Máme  $\|L_0^\Delta\|_{2,p}^2 = \int_0^\infty 1 \cdot x^\Delta e^{-x} = \Gamma(\Delta+1)$

$$\begin{aligned} \|L_1^\Delta\|_{2,p}^2 &= \int_0^\infty ((\Delta+1)-x)^2 x^\Delta e^{-x} = (\Delta+1)^2 \Gamma(\Delta+1) - 2(\Delta+1)\Gamma(\Delta+2) + \Gamma(\Delta+3) \\ &= (\Delta+1)\Gamma(\Delta+2) - 2(\Delta+1)\Gamma(\Delta+2) + \Gamma(\Delta+3) \\ &= \Gamma(\Delta+3) - (\Delta+1)\Gamma(\Delta+2) \\ &= (\Delta+2)\Gamma(\Delta+2) - (\Delta+1)\Gamma(\Delta+2) = \Gamma(\Delta+2) \end{aligned}$$

a rekurentně

$$\|L_m^\Delta\|_{2,p}^2 = \frac{\Delta+m}{m} \cdot \frac{\Delta+m-1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta+2}{2} \cdot \underbrace{\|L_1^\Delta\|_{2,p}^2}_{\Gamma(\Delta+2)} = \frac{1}{m!} \Gamma(\Delta+m+1)$$

platí i pro  $m=0,1$

$$\Rightarrow \boxed{\|L_m^\Delta\|_{2,p}^2 = \frac{1}{m!} \Gamma(\Delta+m+1) \quad \forall m=0,1,2,\dots}$$

#### ④ Tzv. vyvoňující funkce

Def. Vyvoňující funkcí pro daný systém  $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$ ,  $\varphi_m = \varphi_m(x)$ , mazon lokální funkcí  $F = F(x,t)$ , která je analytická v okolí  $t=0$  (pro všechna  $x$ ) a její rozvoj do Taylorovy řady podle  $t$  v  $t \in U(0)$  generuje koeficienty  $\varphi_m(x)$ . Tedy:

$$F(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) t^m.$$

Zde tedy hledáme lokální  $F$ , pro kterou  $F(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^\Delta(x) t^m$ .

Budeme postupovat tak, že rozvineme vhodnou funkci  $f \in L_p^2(0,\infty)$  s parametrem  $t$  do řady v Laguerrových polynomech. Tím dostaneme řadu typu  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) L_m^\Delta(x)$  a budeme měřovat k tomu, aby  $c_m \approx t^m$ .

Tevie říká, že pokud  $f \in L^2_{x^p e^{-x}}(0, \infty)$  [a pokud  $L^p_m(x)$  je úřý  $L^2_{x^p e^{-x}}(0, \infty)$ ],  
 tak  $\exists c_n \in \mathbb{C}$  krom

$$c_n = \frac{1}{\|L^p_m\|_{2,p}} (f, L^p_m)_{2,p}, \quad \text{re } f = \sum c_n L^p_m$$

$\downarrow$   
norma  $L^2_{x^p e^{-x}}(0, \infty)$

(to je neobecné teorie Fourierův řad).

Chceme rozšířit funkci  $e^{-ax}$  (pokud chceme hledat  $a = a(t)$ ).

(i) Osná otázka: pro jaká  $a \in \mathbb{R}$  je  $e^{-ax} \in L^2_{x^p e^{-x}}(0, \infty)$ ?

$$\int_0^{\infty} (e^{-ax})^2 x^p e^{-x} dx < \infty$$

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-(2a+1)x} dx < \infty \quad \text{pro } p > -1, \text{ pokud}$$

$$2a+1 > 0$$

$$\underline{a > -\frac{1}{2}}$$

Pro jak  $a$  spočítáme

$$c_n = \frac{1}{\|L^p_m\|_{2,p}} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^p e^{-x} L^p_m(x) dx = \left[ \text{parť explicitní} \right]$$

$$= \frac{m!}{\Gamma(\Delta+m+1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^p e^{-x} \left( \frac{1}{m!} x^{-p} e^x (x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\Delta+m+1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} (x^{\Delta+m} e^{-x})^{(m)} dx = \left[ \begin{array}{l} m \times \text{per partes} \\ \text{mí každém fázím} \\ \text{faktor } "(-a)" \end{array} \right]$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(\Delta+m+1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\Delta+m} e^{-x} dx =$$

$(a+1)x = \gamma$

hraniční člen = 0

$$= \frac{a^m}{\Gamma(\Delta+m+1)} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{\Delta+m} \frac{1}{a+1} dy =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(\Delta+m+1)} \cdot \frac{1}{(a+1)^{\Delta+m+1}} \Gamma(\Delta+m+1) = \frac{1}{(a+1)^{\Delta+1}} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m$$

Odkud tedy dostáváme:

$$e^{-ax} \stackrel{\text{s.r.}}{=} \frac{1}{(a+1)^{\Delta+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m L_m^{\Delta}(x) \quad a > -\frac{1}{2} \quad (*)$$

Pozn.: • Obecně platí rovnost ve komplexní rovině, ve kteréž byla odvozena, tj. ve  $L_{x^{\Delta}} e^{-x} (0, \infty)$ , neboli s.r.  
Pokud jsou však na obou stranách stejné funkce (tj. například pokud řada opravdu konverguje alespoň lokálně stejnoměrně v  $\mathbb{R}$ ), platí rovnost ve všech  $x \in \mathbb{R}$ .

- Dosazením  $a=0$  do (\*) vyprádním opravdu všechny členy pro  $m \geq 1$  a dostaneme

$$1 = L_0^{\Delta}(x), \text{ což je mile.}$$

- Pro  $a=1$  dá (\*)

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{\Delta+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m^{\Delta}(x)}{2^m}$$

speciálně pro  $\Delta=0$  máme  $e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m^0(x)}{2^{m+1}}$ .

(ii) Druhá část: sestavení vyvolávající funkce.

Položíme  $t = \frac{a}{a+1}$  v (\*).  $\frac{dt}{da} = \frac{1}{(a+1)^2} > 0$  prode.  
 $\Downarrow$   
 $a = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{1}{a+1} = 1-t$

Platí  $a > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in (-1, 1)$

Úpravou (\*) máme

$$(a+1)^{\Delta+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\Delta}(x) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

$$\left. \begin{array}{l} \{ \\ \downarrow \end{array} \right\} a \rightarrow t$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-t)^{\Delta+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}}_{\text{vytvářicí funkce}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\Delta}(x) t^n \quad t \in (-1, 1)$$

Vytvářicí funkce pro Laguerrovy polynomy.

≡

V tabulce „Ortogonální systémy polynomů“ v dodatku uvádíme tyto systémy polynomů

Laguerrovy, Hermiteovy, Legendreovy,  
Čebyševovy, Gegenbauerovy.

- Vidět můžeme
- generující rovnici
  - vyjádření řadem (4-6)
  - explicitní tvar
  - rekurentní vztah a velikosti momentů
  - vytvářicí funkci
- a zejména
- pozn., že všechny mají vlastní.

TO JE VŠE.

mu. J., 16.5.2017  
reviz. 7.5.2019