2. ZÁKLADY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

2.1. Motivace: řešení jedné ODR

Příklad. Uvažujme počáteční úlohu pro ODR

$$y'' + y = f(x), \quad \text{na } (0,a), \quad a>0, \qquad (1)$$
$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 0,$$

kde $f \in C(\langle 0,a \rangle)$. Řešení této úlohy pro $f \equiv 0$ je $y = \cos x$, jak snadno zjistíme například metodou charakteristického polynomu. Pro nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou f můžeme použít např. metodu variace konstant.

Z tvaru $\quad y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

dostaneme rovnice pro $c_1(x), c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= f(x) \end{aligned} \qquad (2)$$

odkud plyne
$$c_1' = -f \cdot \sin x$$
$$c_2' = f \cdot \cos x$$

a tedy $\quad c_1(x) = -\int_0^x f(t)\sin t \, dt, \quad c_2(x) = \int_0^x f(t)\cos t \, dt$ jsou jedna z řešení (2). *)

Dostáváme

$$y_p = \sin x \int_0^x f(t)\cos t \, dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t \, dt =$$
$$= \int_0^x f(t)\left(\sin x \cos t - \cos x \sin t\right) dt = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\, dt,$$

---

*) Pozn.: Mohli jsme samozřejmě zvolit pro c_1 resp. c_2 i jinou z primitivních funkcí k $-f(x)\sin x$ resp. $f(x)\cos x$ (lišících se však jen o konst.), tato volba však způsobí, že y_p splňuje počáteční podmínky.

tedy celkově
$$y(x) = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt. \qquad (3)$$

Dosazením se lze přesvědčit, že funkce y daná předpisem (3) je řešením úlohy (1) (a z teorie víme, že jediným).

Poznámka: Při dosazování (3) do (1) se může hodit následující lemma o derivování integrálu jak podle parametru, tak podle mezí:

$\boxed{\text{Lemma}}$ Buďte $a, b \in C^1((\alpha,\beta))$, $a((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $b((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $g \in C^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$, a nechť funkce a, b, g a $\frac{\partial g}{\partial x}$ jsou omezené na svých definičních oborech. Potom:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt + g(b(x))\cdot b'(x) - g(a(x))\cdot a'(x), \qquad (4)$$
$$x \in (\alpha,\beta).$$

Důkaz

Protože g je spojitá ve druhé proměnné, existuje $G \in C^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$ taková, že
$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in (\alpha,\beta)\times(A,B). \qquad (4.a)$$
Podle Newton-Leibnizovy formule tedy je
$$\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = G(x,b(x)) - G(x,a(x)). \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(G(x,b(x)) - G(x,a(x))\Big) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}(x,b(x)) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,a(x))}_{\substack{\text{derivace podle} \\ \text{1. proměnné}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}(x,b(x))}_{g(x,b(x))}\cdot b'(x) - \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}(x,a(x))}_{g(x,a(x))}}_{\text{dle (4.a)}}\cdot a'(x)$$

Důkaz se dokončí tím, že se ověří, že

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,c) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,d) = \int_d^c \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Skutečně, je-li $G(x,t)$ primitivní ke $g(x,t)$ v proměnné t, je $\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ primitivní ke $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, v proměnné t, za vhodných předpokladů. Proveďte podrobně.

$\boxtimes$

Uvažujme nyní modifikaci úlohy (1), a sice

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(x)\,y(x) \quad \text{na } (0,a), \quad a>0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

na pravé straně rovnice máme tedy ve zdůrazněném členu jakousi „zpětnou vazbu".

Pouze na základě analogie si troufneme vyslovit následující hypotézu:

Pokud existuje funkce $y \in C(\langle 0,a\rangle)$, která splňuje vztah

$$y(x) = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt, \tag{6}$$

pak je tato funkce třídy $\mathcal{C}^2(\langle 0,a\rangle)$ a řeší úlohu (5).
Ověříme tuto hypotézu s využitím lemmatu z předchozí strany.
Především platí, že pokud je $y \in \mathcal{C}(\langle 0,a\rangle)$, je integrand v (6) spojitý, tedy je $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,a\rangle)$, a máme

$$y'(x) = -\sin x + \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,y(t)\,dt + 0, \qquad (7)$$

odkud stejnou úvahou máme $y' \in \mathcal{C}^1(\langle 0,a\rangle)$, tedy $y \in \mathcal{C}^2(\langle 0,a\rangle)$, a

$$y''(x) = -\cos x - \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt + f(x)\,y(x). \qquad (8)$$

Z (6)–(8) dostaneme $y'' + y = f(x)\,y(x)$, stejně jako $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Ověřili jsme tedy, že

> Pokud existuje $y \in \mathcal{C}(\langle 0,a\rangle)$ taková, že platí (6), je tato funkce klasickým řešením úlohy (5). (9)

Zatím jsme úlohu (6) nevyřešili, pouze jsme ji přeformulovali. Uvidíme však, že vhodným pohledem na toto přeformulování budeme schopni otázku existence (i jednoznačnosti) řešení odpovědět.

Píšeme

$$y(x) = \underset{\substack{\parallel \\ u(x)}}{\cos x} + \int_0^x \underbrace{\sin(x-t)\,f(t)}_{K(x,t)\ \dots\ \text{integrační jádro}}\,y(t)\,dt$$

tj.

$$y(x) = u(x) + \int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt \qquad (10)$$

což je přeformulování úlohy (6) na obecnější integrální rovnici (10).

Využijeme však ještě obecnější formulaci. Označíme

$$Ty(x) := \int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt = \int_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,y(t)\,dt, \tag{11}$$

kde $T : C(\langle 0,a\rangle) \to C(\langle 0,a\rangle)$ je (evidentně) lineární operátor.
Úlohu (6) resp. (10) lze chápat jako rovnici

$$y = u + Ty \tag{12}$$

na Banachově prostoru $C(\langle 0,a\rangle)$. (12) můžeme psát také

$(Id - T)y = u$, kde Id je identický operátor na $C(\langle 0,a\rangle)$, nebo (zatím ovšem zcela formálně, protože nevíme, zda něco jako „inverzní operátor k $Id - T$" existuje)

$$y = [Id - T]^{-1} u\,. \tag{13}$$

Formulace (13) má důvodů až k těmto otázkám:

- Jaké jsou vlastnosti operátoru T z (11)?
- Za jakých podmínek existuje operátor inverzní k $Id - T$, a jaké má vlastnosti?
- Je y, „definované" pomocí (13) řešením naší úlohy?

Nejprve odpovíme na první otázku: T je lineární a omezený, tedy spojitý operátor na $C(\langle 0,a\rangle)$, tedy $T \in \mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))$.

Připomeňme:

$$\|y\|_{C(\langle 0,a\rangle)} = \sup_{\langle 0,a\rangle} |y(x)| \quad \left(=: \|y\|_\infty\right).$$

Důkaz: Linearita je zřejmá, pro omezenost uvážíme nejprve

$$\|Ty\|_\infty = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \left| \int_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,y(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \int_0^x |f(t)|\cdot|y(t)|\,dt \le a\cdot\|f\|_\infty \|y\|_\infty,$$

Protože
$$\|T\|_{\mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))} = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \|Ty\|_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty \le 1} a\|f\|_\infty \|y\|_\infty \le a\|f\|_\infty < \infty, \qquad (13b)$$
jde tedy (pokud $\langle 0,a\rangle$ je omezený interval) o omezený operátor. $\boxtimes$

Pro odpověď na další otázky máme přichystánu následující větu. Všimněte si, že její velká abstrakce je pouze zdánlivá: v podstatě jde o popis naší úlohy v operátorové řeči.

Věta 1 Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$. Definujme $T^0 \equiv Id$, $T^{j+1}y = T(T^j y)$ tzv. iterovaný operátor. Dále nechť je splněna alespoň jedna z následujících tří podmínek:

(a) $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$,

(b) $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$,

(c) $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j y\|_X < \infty \quad \forall y \in X$,

Potom

1) $\forall u \in X$ existuje jediné $y \in X$ takové, že $(Id - T)y = u$.

2) Definujeme-li zobrazení "$u \mapsto y$" z předchozího bodu, a označíme-li jej $(Id-T)^{-1}$, platí:
$$(Id-T)^{-1}(Id-T) = (Id-T)(Id-T)^{-1} = Id,$$
a navíc
$$(Id-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \quad \left(:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} T^j \right) \qquad (14)$$
ve smyslu konvergence v $\mathcal{L}(X)$.

Pozn.:

① Řadě ve (14) se říká von Neumannova řada operátoru T,

② V následujícím ukážeme, že (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), že jde tedy o řetězec podmínek.
Platí
$$\|T^2 y\|_X = \|T(Ty)\|_X \le \|T\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ty\|_X \le \|T\|^2_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X .$$
Odtud $\|T^2\| = \sup\limits_{\|y\|_X \le 1} \|T^2 y\|_X \le \|T\|^2$ a indukcí snadno
$$\|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|T\|^j_{\mathcal{L}(X)} . \qquad (15)$$
Pokud tedy platí (a), je $\sum\limits_{j=0}^{n} \|T^j\| \le \sum\limits_{j=0}^{n} \|T\|^j \le \sum\limits_{j=0}^{\infty} \|T\|^j < \infty$,
a limitní přechod $n \to \infty$ ihned dává (b). Pokud platí (b), je
$$\sum_{j=0}^{n} \|T^j y\| \le \|y\| \sum_{j=0}^{n} \|T^j\| \le \|y\| \sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| < \infty, \text{ odtud (c).}$$
Skutečně tedy (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) a bude stačit ukázat, že podmínka (c) implikuje tvrzení věty. (Jsme však vděčni za to, že máme tři různé podmínky: různé operátory mohou splňovat a), b) nebo c), viz dále.)

③ Ještě než větu dokážeme, přesvědčme se, že operátor T, definovaný v (11), splňuje její předpoklady: $\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle)$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle))$. V (13b) jsme navíc ukázali, že
$$\|T\|_{\mathcal{L}} \le a \|f\|_\infty .$$
Odtud ihned dostáváme, že pro každé $f \in \mathcal{C}(\langle 0,b\rangle)$ existuje takové $a \in (0,b)$, že $\|T\| < 1$. Z tvrzení věty pak dostaneme

existenci a jednoznačnost řešení úlohy (6), tedy i (5), na příslušně zkráceném intervalu $\langle 0,a \rangle$ tak, aby $a\|f\|_\infty < 1$.
Toto je typický představitel tzv. vět o lokální existenci řešení diferenciální rovnice.
Nevýhoda tohoto tvrzení spočívá v tom, že tento interval existence řešení závisí na velikosti pravé strany f.

Toto porovnání nám názorně bude sloužit i jako poučení: ukážeme nyní, že T splňuje podmínku (c) bez jakýchkoli požadavků na velikost a; jen uděláme naše odhady jemněji:
je

$$|Ty(x)| \le \int_0^x |f(t)||y(t)|\,dt \le x\|f\|_\infty \|y\|_\infty \quad \Big(\text{neděláme } \sup_{x\in\langle 0,a\rangle}\Big)$$

dále

$$|T^2y(x)| \le \int_0^x |f(t)||Ty(t)|\,dt \le \|f\|_\infty^2\|y\|_\infty \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty^2\|y\|_\infty,$$

odkud dostaneme indukcí

$$|T^j y(x)| \le \frac{x^j}{j!}\|f\|_\infty^j \|y\|_\infty .$$

Až nyní provedeme $\sup\limits_{x\in\langle 0,a\rangle}$ a dostaneme $\|T^j y\| \le \frac{a^j}{j!}\|f\|_\infty^j\|y\|_\infty$
a tedy $\|T^j\| = \sup\limits_{\|y\|_\infty\le 1}\|T^j y\| \le \frac{a^j}{j!}\|f\|_\infty^j$. Odtud:

$$\sum_{j=0}^\infty \|T^j\| \le \exp(a\|f\|_\infty) < \infty .$$

Podmínka (b) je tedy splněna a my jsme došli k závěru, že pokud dokážeme Větu 1, ukázali jsme názorně existenci a jednoznačnost (klasického) řešení úlohy (5) pro libovolný (ale omezený) interval $\langle 0,a\rangle$, a pro libovolnou $f \in C(\langle 0,a\rangle)$.

Důkaz Věty 1.

Podle bodu (2) předchozí poznámky stačí ukázat, že tvrzení věty plyne z předpokladu (c).

Definujme následující posloupnost prvků $y_n \in X$ (tzv. „iterační proces").

$$y_0 \in X \quad \text{libovolný}$$
$$y_{n+1} := u + T y_n .$$

Máme
$$y_1 = u + T y_0$$
$$y_2 = u + T y_1 = u + Tu + T^2 y_0 ,$$
indukcí snadno plyne

$$y_n = \sum_{j=0}^{n-1} T^j u + T^n y_0 . \qquad (16)$$

Ukážeme, že posloupnost y_n má v X limitu. Protože X je Banachův, a tedy úplný, stačí pro konvergenci y_n ukázat, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$, uvažujme $n > m$ a počítejme:

$$y_n - y_m = \sum_{j=m}^{n-1} T^j u + T^n y_0 - T^m y_0 ,$$

tedy

$$\|y_n - y_m\| \leq \sum_{j=m}^{n-1} \|T^j u\| + \|T^n y_0\| + \|T^m y_0\| .$$

Protože platí podmínka (c), je první člen menší než ε pro dostatečně velká $n > m$. Stejně tak členy $\|T^n y_0\|$, $\|T^m y_0\|$ jsou (jako n-tý resp. m-tý člen konvergentní řady tvaru (c)) menší než ε pro dostatečně velká n, m.

Posloupnost $\{y_n\}$ je tedy cauchyovská v Banachově prostoru X, proto je konvergentní v X, tedy existuje $y \in X$ takové, že

$y_n \xrightarrow{X} y$. Protože T je spojitý, je $Ty_n \xrightarrow{X} Ty$, tedy platí i

$$\begin{array}{ccc} y_{n+1} & = & u + Ty_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & u + Ty \end{array}$$

a y je řešením rovnice $y = u + Ty$ (pro libovolné $u \in X$).
Ukažme, že toto řešení je jediné. Nechť tedy jsou dvě, y a z, tedy nechť platí

$$y = u + Ty$$
$$z = u + Tz$$

Odečtením těchto rovnic a označením $w = y - z$ získáme vztah

$$w = Tw.$$

Odtud ovšem indukcí plyne $w = Tw = T^2 w = \dots = T^j w \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Tedy $\|w\| = \|T^j w\| \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j w\|$ je ovšem konvergentní řada typu (c) tedy

$$\|w\| = \lim_{j \to \infty} \|T^j w\| = 0, \text{ odkud } w = 0,$$

a tedy $y = z$.
Úloha $y = u + Ty$ má tedy $\forall u \in X$ právě jedno řešení $y \in X$.
Jinak řečeno: Víme: $\left.\begin{array}{l} Id - T \text{ lin + spoj} \\ \forall u \in X\ \exists!\, y \in X,\ (Id - T)y = u \end{array}\right\} \Rightarrow Id - T$ je <u>na</u> a <u>prosté</u>.
Zobrazení $u \mapsto y$ je tedy dobře definované zobrazení z X do X.
Označme je $(Id - T)^{-1}$, tj. $y = (Id - T)^{-1} u$, $\forall u \in X$. Je lineární a prosté, nevíme nic o jeho spojitosti.
Z (16) dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} y_n & = & \sum_{j=0}^{n-1} T^j u & + & T^n y_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & = & \sum_{j=0}^{\infty} T^j u & + & 0, \end{array}$$

tedy máme pro všechna $u \in X$: $(Id - T)^{-1} u = \sum_{j=0}^{\infty} T^j u$, neboli
$(Id - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ ve smyslu rovnosti operátorů.

Konečně, označme
$$S_N := \sum_{j=0}^{N} T^j .$$
Pak
$$S_N \circ (Id - T) = \sum_{j=0}^{N} T^j - \sum_{j=1}^{N+1} T^j = T^0 - T^{N+1} = Id - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{T^{N+1}}$$
a podobně pro $(Id - T) \circ S_N$.

$\boxed{X}$

Poznámka: Časem uvidíme, že platí: je-li operátor $T : X \to X$ lineární, omezený, prostý a na, pak jeho inverze T^{-1} (která existuje) je také lineární a omezená, tj. spojitá.
To vnáší do naší úlohy tzv. pojem stability. Je-li totiž inverzní operátor (v našem případě $(Id-T)^{-1}$) spojitý, pak to znamená, že pro
$$u_n \xrightarrow{X} u \implies \underbrace{(Id-T)^{-1} u_n}_{y_n} \xrightarrow{X} (Id-T)^{-1} u$$
$$y_n \xrightarrow{X} y,$$
jinak řečeno, „blízkým pravým stranám rovnice u_n" odpovídají „blízká řešení", či: malé změny na pravé straně rovnice způsobí malé změny řešení. A to právě je stabilita řešení.

Př Uvažujme
$$y'' + y = x^2 y$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$
Úloha má na libovolném $\langle 0, a \rangle$ jediné řešení (podle předchozí teorie). Můžete ověřit, že funkce $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je tímto řešením.
Díky předchozí větě však také víme, že toto řešení je možné získat pomocí iterací (tj. lze se k němu libovolně přiblížit). Uvažujte $y_0 \equiv 0$ a najděte prvních pár iterací. Zdá se vám, že konvergují k $e^{-\frac{x^2}{2}}$? Užijete u toho jistě nějaké zajímavé počítání. :)

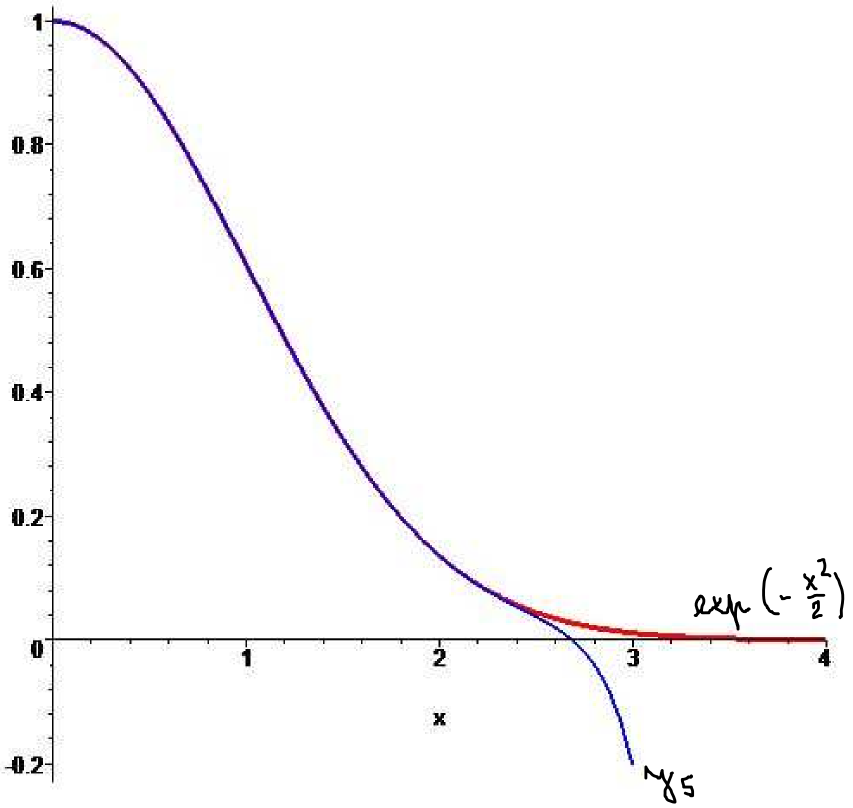
Při $y_0 = 0$ dostáváme pro y_5:

$$y_0 := 0$$

$$y_5 := \cos(x) - \frac{54975}{1024}\sin(x)\,x^3 - \frac{164925}{2048}x^2\cos(x) + \frac{164925}{2048}\sin(x)\,x + \frac{165437}{6144}\cos(x)\,x^4 - \frac{154871}{46080}\cos(x)\,x^6 + \frac{32383}{3072}\sin(x)\,x^5 + \frac{126481}{645120}\cos(x)\,x^8 - \frac{143131}{161280}\sin(x)\,x^7 + \frac{12983}{362880}\sin(x)\,x^9 - \frac{18889}{3628800}\cos(x)\,x^{10} + \frac{1}{31104}\cos(x)\,x^{12} - \frac{7}{12960}\sin(x)\,x^{11}$$

Struktura této řady je zajímavá: obsahuje členy tvaru $a_k \cos x \cdot x^k + b_k \sin x \cdot x^k$

Rozdíl mezi y_5 a $\exp(-\frac{x^2}{2})$ ukazuje tento obrázek:



2.2. Základní pojmy spektrální analýzy

Budeme zkoumat operátorovou rovnici pro neznámé $x \in X$

$$(T - \lambda I)x = u \quad , \lambda \in \mathbb{C}, \quad T \in \mathcal{L}(X), \; u \in X \qquad (1)$$

X Banachův

Motivací k tomu je předchozí paragraf.
Označme $T_\lambda := T - \lambda I$, pak $T_\lambda \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow T \in \mathcal{L}(X)$.

Označme obor hodnot (range) operátoru T_λ:

$$R(T_\lambda) := \{y \in X, \exists x \in X, T_\lambda x = y\} \quad (= T_\lambda(X))$$

Otázky řešitelnosti rovnice (1) lze přeformulovat v řeči operátoru T_λ takto:

V řeči rovnice	V řeči operátoru
$\exists$ řešení pro libovolnou pravou stranu $u \in X$?	Je T_λ <u>na</u>, tj. je $R(T_\lambda) = X$?
Pokud řešení pro dané $u \in X$ existuje, je určeno jednoznačně?	Je T_λ <u>prostý</u> na X?
Pokud $\forall u \in R(T_\lambda)\ \exists!\, x \in X;\ T_\lambda x = u$, je toto řešení <u>stabilní</u>? (viz pozn. níže)	Je-li T_λ prostý, je potom T_λ^{-1} spojitý na $R(T_\lambda)$?

<u>Pozn</u>: Pod <u>stabilitou</u> řešení míníme (zjednodušeně) situaci, kdy v rovnici $T_\lambda x = u$, která má jednoznačně určené řešení pro $\forall u \in U(u_0)$ platí, že „malé změny $u \in U(u_0)$" mají za následek „malé změny řešení". To přesně odpovídá situaci, kdy je inverzní

zobrazení T_λ^{-1} spojité na $U(u_0)$. Tato vlastnost je velmi důležitá při hledání přibližného řešení: při něm často aproximujeme pravou stranu u nějakou „přibližnou pravou stranou" $\tilde{u}$ a doufáme, že i řešení $\tilde{x}$, které odpovídá pravé straně $\tilde{u}$, bude blízké řešení x, odpovídajícímu pravé straně u. Pro nestabilní operátory to však nemusí být pravda.

Podívejme se nejprve na situaci pro $\dim X = n \in \mathbb{N}$

V konečné dimenzi: $T \in \mathcal{L}(X) \iff \exists$ matice $M \in \mathcal{M}^{n\times n}$ taková, že

$$T(x) = M \cdot x \quad \forall x \in X$$

(v X volíme jednu pevnou bázi)

Potom platí T je prosté $\iff$ T je na $\iff$ M, reprezentující T, je regulární

$$\Updownarrow$$

T^{-1} je prosté $\iff$ T^{-1} je na $\iff$ M^{-1} je regulární a reprezentuje T^{-1} (tj. T^{-1} je lin.)

Celkově v konečné dimenzi je každý lineární operátor spojitý, je i $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

V konečné dimenzi tedy platí „všechno nebo nic", tzv. konečnědimenzionální Fredholmova alternativa pro $T \in \mathcal{L}(X)$; $\dim X = n$.

Nastává právě 1 z následujících situací:

(a) T je prosté, na a má spojitou inverzi

(b) T není prosté, není na a nemá spojitou inverzi

V nekonečné dimenzi není obecně žádný vztah mezi prostotou a zobrazením na:

Příklad: Definujme prostor ℓ_2 – posloupností:

$$\ell_2 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

Lze ukázat, že ℓ_2 s normou $\|\{x_n\}\|_{\ell_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ je Banachův prostor (je dokonce Hilbertův – více na str. 28).
Na ℓ_2 definujeme dva tzv. operátory posunu ("shift operators")

$$A_1 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$
$$A_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Evidentně $\|A_1 x\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \Rightarrow \|A_1\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_1 x\| = 1$

$$\|A_2 x\|_{\ell_2} \le \|x\|_{\ell_2} \Rightarrow \|A_2\| \le 1$$

tj. oba jsou omezené, tedy spojité, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\ell_2)$.

Přitom:
- A_1 je prostý (různým prvkům přiřadí různé prvky) ale není na (nic se nezobrazí např. na $(1,0,0,0,\dots)$)
- A_2 je na, ale není prostý (rozmyslete).

Nicméně, co se týče stability, tak i v nekonečné dimenzi platí tato hluboká věta:

$\boxed{\text{Věta 1}}$ $A \in \mathcal{L}(X)$, X Banachův; nechť A je prostý a na.
Potom $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, tj. A^{-1} je spojitý.

Důkaz: Věta je důsledkem tzv. Věty o otevřeném zobrazení, důkaz lze nalézt např. ve skriptu
[Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy, 4.13 – 4.16] ☒

Pozn.: Tímto se zdá, že problém stability řešení je vyřešen: stačí prostota & „na". Ano, pro lineární omezené (tj. spojité) operátory tomu tak je. Ale např. pro lineární nespojité nebo pro nelineární operátory není situace tak jednoduchá.

Možné stavy operátoru:

Buď $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banachův, $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_\lambda := T - \lambda I \in \mathcal{L}(X)$. Pak v závislosti na $\lambda \in \mathbb{C}$ může operátor T_λ mít různé vlastnosti z hlediska jeho prostoty, spojitosti inverze a velikosti $R(T_\lambda)$. Následující tabulka shrnuje všechny možnosti, přičemž dvě z nich nemohou nastat: ta, která je vyloučena Větou 1 (označeno „V1") z předchozí strany, a ta, která je vyloučena Lemmatem 1, které zformulujeme a dokážeme za chvíli (označeno „L1")

Tabulku je nutno chápat tak, že pomocí ní definujeme různé kategorie, do kterých může padat parametr $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy například levý horní roh tabulky je nutno číst takto: „$\lambda \in \mathbb{C}$ je regulárním bodem T, pokud T_λ je prosté, T_λ^{-1} spojité a $R(T_\lambda) = X$". Atd.

		T_λ „na"	T_λ není „na"	
		$R(T_\lambda) = X$	$R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	$\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prosté	$\exists T_\lambda^{-1}$ a je spojitý	λ je regulární bod T	$\boxed{\text{L1}}$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
	$\exists T_\lambda^{-1}$ a není spojitý	$\boxed{\text{V1}}$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ není prosté	neex. T_λ^{-1}	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Komentář:

- $\sigma_c(T)$ … tzv. spojité spektrum operátoru T. Pokud $\lambda \in \sigma_c(T)$, tak rovnice $T_\lambda y = u$ nemá řešení pro každou pravou stranu $u \in X$ (protože $R(T_\lambda) \neq X$), ale platí, že ke každé pravé straně $u \in X$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in X$, $\|u_\varepsilon - u\|_X < \varepsilon$ a přitom existuje řešení rovnice $T_\lambda y = u_\varepsilon$ (to je důsledek toho, že $\overline{R(T_\lambda)} = X$.). … Někdy se jim říká „skoro-řešení". Zároveň však T_λ je nestabilní (T_λ^{-1} je nespojitý), takže nedává dobrý smysl se bavit o tom, co se děje s řešeními, když trochu měníme pravé strany u_ε.

- $\sigma_R(T)$ … tzv. residuální spektrum T. Protože $\overline{R(T_\lambda)} \neq X$, nejsou k dispozici řešení pro velkou část $u \in X$.

- $\sigma_p(T)$ … tzv. bodové spektrum T. T_λ není prostý, tj.

$$\exists\, x_1 \neq x_2, \quad T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2 \qquad x := x_1 - x_2 \neq 0$$

$$\text{tj.}\quad \exists\, x \neq 0 \qquad T_\lambda x = 0$$

$$(T - \lambda I)x = 0$$

$$Tx = \lambda x.$$

Tedy $\lambda \in \sigma_p(T) \iff \exists\, x \neq 0 \;\; Tx = \lambda x \overset{\text{def.}}{\iff}$ λ je vlastní číslo T a $x \neq 0$ je odpovídající vl. vektor.

Def: Spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ je $\sigma(T) := \sigma_c(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_p(T)$.

Pozorování: 1) $\lambda \in \sigma(T) \iff T_\lambda$ není prostý nebo není na.

2) λ regulární $\iff T_\lambda$ prostý, na (a pak už T_λ^{-1} spojitý)

3) Ne každý prvek spektra T je vlastním číslem.

Def. Spektrální poloměr $\rho(T) := \sup\{|\lambda|;\ \lambda\in\sigma(T)\}$

Pozorování: • Pokud je $\rho(T)<+\infty$, pak platí: $|\lambda|>\rho(T) \Rightarrow \lambda$ regulární

Je potřeba ještě zmínit ono Lemma 1, slíbené na str. 24:

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ X Banachův, $A\in\mathcal{L}(X)$. Potom:

$$\left.\begin{matrix} R(A)\neq X,\ \overline{R(A)}=X,\ \exists A^{-1}: R(A)\to X \\ (\text{tj. } A \text{ prosté}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^{-1} \text{ není spojité}$$

D: Nechť A^{-1} je spojité na $R(A)$.

- $R(A)\neq X \Rightarrow \exists y\in X\setminus R(A)$
- $\overline{R(A)}=X \Rightarrow \exists y_n\in R(A);\ y_n\to y$ v X.
- $y_n\in R(A) \Rightarrow \exists x_n\in X,\ A(x_n)=y_n \Rightarrow x_n=A^{-1}(y_n)$.
- y_n konverguje v X $\Rightarrow$ y_n cauchyovská v X $\underset{(A^{-1}\text{ spoj.})}{\Rightarrow}$ x_n cauchyovská v X $\underset{(X\text{ úplný})}{\Rightarrow}$ $\exists x\in X$, že $x_n\to x$.
- Potom ale $Ax = A(\lim x_n) \underset{A\text{ spojité}}{=} \lim \underbrace{Ax_n}_{y_n} = \lim y_n = y$

Odtud $\exists x\in X$, $Ax=y$, tj. $y\in R(A)$

což je spor s ~~~ $\boxed{X}$

Poznámka: Jak vypadá tabulka ze str. 24 v konečné dimenzi?

Víme (viz str. 22):

$T\in\mathcal{L}(X)$; $\dim X = n\in\mathbb{N}$ je reprezentován maticí $M\in\mathbb{M}^{n\times n}$.

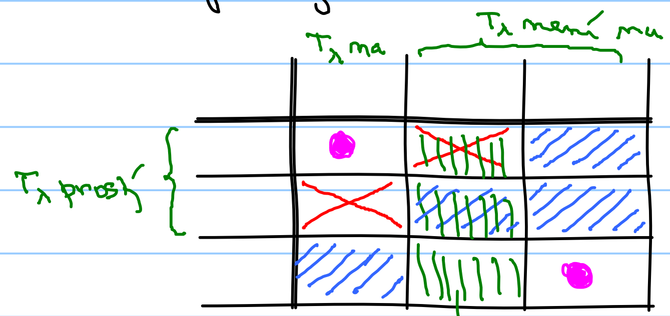
Potom platí: T je prosté $\Leftrightarrow$ T je na $\Leftrightarrow$ M je regulární a reprezentuje T

$\Updownarrow$

T^{-1} je prosté $\Leftrightarrow$ T^{-1} je na $\Leftrightarrow$ M^{-1} je regulární a reprezentuje T^{-1}

Za výše popsané situace je navíc vždy $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$.

Ve schématicky nakreslené tabulce ze str. 24:



× nemůže obecně nastat

nemůže nastat díky tomu, že pro $\dim X = n$ je T_λ prostý $\Leftrightarrow$ T_λ má

Tento celý sloupec popisuje situaci $R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$. Ta však v konečné dimenzi také nenastane, protože v kon. dim. platí $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)}$.

V konečné dimenzi tedy nastanou pouze situace, označené ●
a tedy v konečné dimenzi máme:

1) $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda$ je buď regulární nebo mi je to vl. číslo

2) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda$ je vlastní číslo $T\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda$ je vl. č. $M\}$.

Následující věta ukazuje, že $\rho(T)$ je pro $T \in \mathcal{L}(X)$ vždy konečný.

Věta X Banachův, $T \in \mathcal{L}(X)$ (tj. $\|T\| < \infty$). Potom:

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow$ ① $\lambda \notin \sigma(T)$, tj. λ je regulární

②
$$(T - \lambda I)^{-1} = T_\lambda^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \in \mathcal{L}(X)$$

Pozn.: • Z ① ihned plyne

$$\boxed{\rho(T) \leq \|T\|}$$

• Řada ve ② se nazývá von Neumannova řada operátoru $T - \lambda I$.

Ⓓ Je-li $|\lambda| > \|T\|$, pak jistě $\lambda \neq 0$. Položme $A := \frac{1}{\lambda} T$.

Potom $\|A\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$ a na A můžeme použít větu na str. 14:

To nám dává: ① $I - A$ je prostá a na $\Rightarrow$ $T - \lambda I = (-\lambda)(I - A)$ je prostá a na

$\Downarrow$ věta na str. 23

$(T - \lambda I)^{-1}$ je spojitý.

Odtud λ je regulární číslo.

② Věta na str. 14 dává i

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad \Big/ \cdot (-1)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{\lambda} \qquad (*)$$

$$\underbrace{(\lambda^{-1})\cdot\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1}}_{(T - \lambda I)^{-1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \qquad \text{cbd.}$$

$\boxed{X}$

Pozn.: V posledním kroku důkazu POZOR! Inverzní zobrazení k $y = 3x$ je $y = \frac{1}{3}x$, tedy inverzní zobrazení má hodnotu koeficientu převrácenou. Vzorec v $(*)$ lze tedy (alternativně) odvodit:

$$\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = \lambda\left(T - \lambda I\right)^{-1},$$ a pak je jasné proč musím rovnici $(*)$ dělit λ.

Na závěr kapitoly uvedeme jeden příklad.

Př: Uvažujme $\ell_2 := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\}$ prostor všech komplexních posloupností, které jsou tzv. „sčítatelné s kvadrátem". Platí (lze ukázat), že ℓ_2 se skalárním součinem $(\{x_n\},\{y_n\})_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ (který indukuje normu $\|\{x_n\}\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}$) je úplný, a tedy Hilbertův

(tj. i Banachův) prostor.
Uvažujme operátor

$$T : \ell_2 \to \ell_2$$

$$T : (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots).$$

Protože $\|Tx\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2}$, je $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|x\| = 1$.

Tedy $\rho(T) \leq \|T\| = 1$ a proto $\underbrace{|\lambda| > 1}$ $\Rightarrow$ λ je regulární.
Celé spektrum T tedy leží v jednotkovém kruhu v $\mathbb{C}$.

• $\underbrace{\lambda = 0}$: Už víme (str. 23), že T <u>není na</u>, je prostý. Zároveň je vidět, že žádný prvek z ℓ_2 se pomocí T nezobrazí na $(a, 0, 0, 0 \dots)$, $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Nelze tedy žádnou posloupnost z $R(T)$ dokonvergovat (např.) k prvku $(1, 0, 0, \dots)$. Proto $\overline{R(T)} \neq \ell_2$, odkud plyne $\underbrace{0 \in \sigma_R(T)}$ (plyne z tabulky na str. 24).

• $\underbrace{|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0}$

a) Ukážeme nejprve, že žádné z těchto λ není vlastním číslem T.
Pokud by tomu tak bylo, tak $\exists x \neq 0$

$$Tx = \lambda x$$

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

tj. (i) $\lambda x_1 = 0$

(ii) $\lambda x_k = x_{k-1} \quad \forall k = 2, 3, 4 \dots$

Z (i) plyne $x_1 = 0$ (neboť $\lambda \neq 0$),
z (ii) pak indukcí plyne $x_2 = x_3 = \dots = 0$
Tedy $x = 0$, což je však spor s tím, že by to měl být vlastní vektor T. $\boxtimes$

b) Ukážeme že T_λ není <u>na</u>, speciálně, že žádné $x \in \ell_2$ se nezobrazí na $(1, 0, 0 \dots)$. Nechť takové $x \in \ell_2$ existuje. Pak tedy

$$T_\lambda x = (1,0,0,\dots)$$
$$\shortparallel$$
$$(-\lambda x_1,\ x_1-\lambda x_2,\ x_2-\lambda x_3, \dots)$$

tedy $\quad 1 = -\lambda x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\lambda}$

$k=1,2,3\dots \quad x_k - \lambda x_{k+1} = 0 \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_k}{\lambda}$

$$\Rightarrow x = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, \dots\right)$$

Zřejmě jsme tedy takové x našli, ale

$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k}} = \infty$, neboť jde o geom. řadu s kvocientem $\frac{1}{\lambda^2}$, pro který $|\lambda| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\lambda^2}\right| \ge 1$.

Protože T_λ je lineární a $(1,0,0,0\dots) \notin R(T_\lambda)$, tak platí také $(a,0,0,\dots) \notin R(T_\lambda)$ $\forall a \in \mathbb{C}, a \ne 0 \Rightarrow \overline{R(T_\lambda)} \ne \ell_2$.

Nacházíme se tedy v posledním sloupci tabulky ze str. 24, $\forall \lambda \ne 0, |\lambda| \le 1$. Protože však současně žádné takové λ není vl. číslem, je $\lambda \in \sigma_R(T)$ pro všechna taková λ. (To by šlo také nezávisle ukázat tak, že bychom ukázali prostotu T_λ – zkuste si.)

<u>Závěr</u>: Pro tuto T platí $\sigma(T) = \sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\}$.
Spektrem je tedy právě celý jednotkový kruh, je tedy nespočetně mnoho prvků spektra (a přitom žádný z nich není vl. číslem). Takový operátor je tedy „poměrně nehezký", ale přitom negeneruje žádné vl. vektory.

Právě jsme provedli spektrální analýzu uvedeného operátoru.

Cvičení: Zkuste spektrálně analyzovat:

a) $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_5}{4}, \dots\right)$$

Řešení: $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma_R(T) = \emptyset$, $\sigma_C(T) = \emptyset$.

Doplňující otázka: jaká je $\|T\|$?

b) $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$$

Řešení: $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

$\sigma(T) = \{0\}$, $\sigma_p = \emptyset$

Doplňující otázka: jaká je $\|T\|$ a je $0 \in \sigma_C(T)$ nebo $0 \in \sigma_R$?