Ortogonální systémy polynomů

1 Laguerrovy polynomy, $L_n^s(x)$

Generující rovnice:	$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$	$\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ (polynom pro $\alpha = -n$, $\gamma = s+1$)
Vyjádření řadou:	$L_n^s = \frac{(s+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n; s+1; x)$	Laguerrovy zobecněné pol. (klasické pro $s = 0$)
Explicitní vyjádření:	$L_n^s = \frac{1}{n!}\, x^{-s} e^x \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$xL_n^s = -(n+1)L_{n+1}^s + (s+2n+1)L_n^s - (s+n)L_{n-1}^s$	
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n$	
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(0, +\infty)$, kde $\rho = x^s\, e^{-x}$	
Norma:	$\|L_n^s\|_\rho^2 = \Gamma(s+n+1)/n!$	

2 Hermiteovy polynomy, $H_n(x)$

Generující rovnice:	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Vyjádření řadou:	$H_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}\, {}_1F_1(-k; 1/2; x^2)$
	$H_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} x\, {}_1F_1(-k; 3/2; x^2)$
Explicitní vyjádření:	$H_n = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$
Vytvořující funkce:	$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(-\infty, +\infty)$, kde $\rho = e^{-x^2}$
Norma:	$\|H_n\|_\rho^2 = 2^n\, n! \sqrt{\pi}$

3 Legendreovy polynomy, $P_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
Vyjádření řadou:	$P_n = {}_2F_1(-n, n+1; 1; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left((1-x^2)^n\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2(-1, 1)$, tj. $\rho = 1$
Norma:	$\|P_n\|_\rho^2 = 2/(2n+1)$

4 Čebyševovy polynomy 1. druhu, $T_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
Vyjádření řadou:	$T_n = {}_2F_1(-n, n; 1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
Rekurentní vztah:	$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{-1/2}$
Norma:	$\lVert T_n \rVert^2_\rho = \pi/2$ pro $n > 0$, $= \pi$ pro $n = 0$

5 Gegenbauerovy (=ultrasférické) λ-polynomy, $C_n^{(\lambda)}(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0\,,\qquad \lambda > -1/2$
Vyjádření řadou:	$C_n^{(\lambda)} = \binom{n+2\lambda-1}{n}\, {}_2F_1(-n, n+2\lambda; \lambda+1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{1/2-\lambda} \left((1-x^2)^{\lambda+n-1/2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)} = 2(n+\lambda)xC_n^{(\lambda)} - (n+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$
Norma:	$\lVert C_n^\lambda \rVert^2_\rho = \frac{\lambda\,(2\lambda)_n}{n!(p+n)} \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda+1)}$