1. ÚVOD: OPERÁTOROVÁ TRIVIA

Co budeme používat za známé:

- $\underline{\text{Vektorový prostor}}$ X nad $\underbrace{\mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}}_{\text{skaláry}}$. Tam, kde nebude důležité, jestli jde o $\mathbb{R}$ nebo o $\mathbb{C}$, budeme někdy používat značení $\mathbb{K}$ (znamenající tedy „buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$")

  Kromě termínu „vektorový prostor" (VP) se používá i termín „lineární prostor" (LP), případně „lineární vektorový prostor" (LVP).

- <u>Lineárně nezávislá</u> (LN) <u>množina</u> ve VP: $M \subseteq X$ je LN, pokud

  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ pro všechny možné n-tice $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ a všechny skaláry $a_j \in \mathbb{K}$.

  <u>Pozn.</u>: I v případě, že M je nekonečná, uvažujeme pouze konečné součty (tj. všechny možné „libovolně dlouhé, ale konečné" součty). Je totiž potřeba si uvědomit, že v obecném VP není definován pojem konvergence, a tedy samotný pojem nekonečného součtu nemá v obecném VP smysl.

- <u>Báze X</u> ($X \neq \emptyset$, $X \neq \{0\}$): 1) Pokud existuje <u>konečná</u> LN množina B v X taková, že její lineární obal

  $$\mathrm{Lin}(B) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \,,\; x_j \in B,\; a_j \in \mathbb{K},\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

  je roven X (říkáme, že M <u>generuje</u> X), pak takovou množinu nazveme <u>bází X</u>. Její mohutnost je pak určena jednoznačně (bez důkazu) a tomuto číslu pak říkáme <u>dimenze X</u>: $\dim X = \mathrm{moh}(B) \in \mathbb{N}$

  2) Pokud v X $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje LN množina o n prvcích, říkáme, že $\dim X = \infty$. V tomto případě je pojem báze složitější:

bází X je v tomto případě taková nekonečná množina B, která splňuje

a) B je LN (ve smyslu všech konečných lin. kombinací – viz výše)

b) $\forall x \in X \ \exists\, m(x) \in \mathbb{N}$ a odpovídající konečný počet prvků báze $x_1, \dots, x_{m(x)}$ a $a_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, m(x)$, že

$$x = \sum_{j=1}^{m(x)} a_j x_j .$$

Pozn.: • I zde tedy jde principiálně o konečné součty prvků, vybraných z nekonečné množiny (pro různá x může jít o různé sady prvků báze).

• Této nekonečné bázi se říká Hamelova báze X nad $\mathbb{K}$. Otázka zní, zda každý VP X (který nemá konečné dimenze) má Hamelovu bázi. Odpověď ANO je důsledkem axiomu výběru (kdo jej tedy neuznává, pro něj by odpověď byla NE)

Př.: • $\underset{\text{VP}}{\mathbb{R}}$ nad $\underset{\text{skaláry}}{\mathbb{R}}$ má dim 1 : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, a = x \in \mathbb{R}$, že $x = a \cdot 1$. Báze je tedy $\{1\}$.

• $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ má dim $= n$.

• $\underset{\text{VP}}{\mathbb{R}}$ nad $\underset{\text{skaláry}}{\mathbb{Q}}$ má dim $= \infty$: lze totiž ukázat, že žádná konečná množina reálných čísel nevygeneruje pomocí racionálních koeficientů všechna reálná čísla.

Tím je vyřešen problém dimenze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Všimněte si, že dimenzi ∞ lze určit i bez znalosti odpovědi na otázku existence báze, tj. bez nutnosti axiomu výběru. Pokud však připustíme axiom výběru, pak existuje Hamelova báze $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$, tj. $\exists\, B \subseteq \mathbb{R}$, že

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, m(x) \in \mathbb{N}\ \exists\, b_1, \dots, b_{m(x)} \in B\ \exists\, q_1, \dots, q_{m(x)} \in \mathbb{Q} \text{ že } x = \sum_{j=1}^{m(x)} q_j b_j .$$

Rozmyslete si, že B je nutně nespočetná (jinak vygeneruji jen spočetně mnoho prvků).

• <u>Norma na LP</u> : $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, že

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

$(X, \|\cdot\|)$ je potom NLP normovaný lineární prostor.

V něm lze definovat konvergenci:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

a lze tedy zavést i nekonečné součty.

Dále lze definovat cauchyovskost

$$\{x_n\} \text{ cauchyovská} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

a úplnost X v normě:

$$(X, \|\cdot\|) \text{ je úplný v normě } \|\cdot\| \overset{def}{\iff} \Big(\{x_n\} \text{ cauchyovská} \Rightarrow \underline{\underline{\exists x \in X}} : x_n \to x \Big)$$

Je-li $(X, \|\cdot\|)$ úplný v normě $\|\cdot\|$, nazývá se <u>Banachův</u> prostor.
(B – prostor)

• Za známé dále považujeme, že pokud $\dim X < \infty$, pak všechny normy na něm jsou <u>ekvivalentní</u>. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nazveme ekvivalentní, pokud $\exists \ c_1, c_2 > 0$, že

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x_1\| \qquad \forall x \in X.$$

• Ekvivalentní normy zachovávají pojem konvergence ($x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$) i cauchyovskosti a tedy i úplnosti. Speciálně: je-li konečnědimenzionální prostor X úplný v $\|\cdot\|$, je úplný i ve všech jiných normách na X.

Toto neplatí v nekonečné dimenzi, např. $C([0,1])$ je úplný v maximové normě $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f(x)|$, ale není úplný v integrální normě

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f| \ .$$

• <u>Skalární součin na LP</u> : $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ (je-li X nad $\mathbb{C}$, má tedy sk. součin komplexní hodnoty), je takové zobrazení, že platí:

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \qquad \forall x,y,z \in X$$

$(x,x) \geq 0$, přičemž $(x,x) = 0 \iff x = 0$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x,y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

- Dvojice $(X, (\cdot,\cdot))$ obdařený skalárním součinem se zove LP se skal. souč., někdy též <u>unitární prostor</u>.
- Snadno lze ukázat, že výraz $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ má všechny vlastnosti normy a tedy:
  - X unitární $\Rightarrow$ X je NLP (s tzv. „normou generovanou sk. s.")
- Pokud je X <u>úplný v normě, generované skalárním součinem</u>, říká se mu <u>Hilbertův prostor</u> (H-prostor), tedy
  - X Hilbertův $\Rightarrow$ X Banachův

    (naopak to neplatí)
- Na libovolném unitárním prostoru platí <u>Cauchy-Schwartzova nerovnost</u>

$$\forall x,y \in X: \qquad |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad , \text{kde } \|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

- X unitární; řekneme, že $x,y \in X$ jsou <u>kolmé</u> na X (v odpovídajícím skal. součinu), pokud
  a) $x \neq 0$, $y \neq 0$
  b) $(x,y) = 0$

  Značíme $x \perp y$.

Př: L^2, L^2_ρ, ℓ_2, $W^{1,2}$, $W^{k,2}$, $W^{k,2}_\rho$ jsou Hilbertovy
$C(K)$, L^p pro $p \neq 2$ jsou Banachovy a nejsou Hilbertovy.

Existence normy (sk. součinu, příp. metriky) definuje na LP tzv. geometrické vlastnosti (vzdálenost, konvergence, pro sk. s. i kolmost).

Nyní připomeneme různé pojmy a vlastnosti, související se <u>zobrazeními</u> na vektorových prostorech.

(I) Buďte X, Y LP (tj. nepotřebuji geometrii)

operátor: $\quad T: X \to Y$

funkcionál: $\quad T: X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

Každý funkcionál je i operátor. Budeme tedy BÚNO definovat další vlastnosti pro operátory.

(II) Operátor $T: X \to Y$ je

- lineární: $T(ax+by) = aT(x) + bT(y) \quad \forall x,y \in X, \forall a,b \in \mathbb{K}$
- nelineární: není lineární.

Pozn: z linearity T plyne, že $T(0)=0$ (volte $a=b=0$)

(III) X, Y NLP:

$T: X \to Y$ je

- omezený: $\forall K>0\ \exists C>0 \quad \|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq C$ (zobrazuje se „omezené mn. na omezené")
- neomezený: není omezený, tj. $\exists K>0\ \forall C>0\ \exists x_C \in X \quad \|x_C\| \leq K \ \&\ \|Tx\| > C$

(IV) X, Y Banachovy

$T: X \to Y$ je

- spojitý: $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ („Heineova definice")
- nespojitý: není spojitý

Dále již budeme uvažovat pouze Banachovy (příp. Hilbertovy) prostory; tj. vždy budeme mít úplnost.

• Mějme lineární operátor $T: X \to Y$ a definujme číslo

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|. \qquad (*)$$

Toto číslo může být i nekonečno (např. pro vhodné neomezený operátor).
Pro lin. operátor však vidím:

$$x \neq 0 \Rightarrow \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \qquad (\|T\| \text{ je supremum takových})$$

$\|Tx\| \leq \|T\|.\|x\|$ — to platí i pro $\|T\| = +\infty$, $\forall x \neq 0$
pokud $\|T\| < \infty$, tak obě strany jsou konečné a
a nerovnost platí $\forall x \in X$ (tj. včetně $x=0$)

Lemma

Pro lin. operátory máme:

$$\underline{T \text{ omezený} \iff \|T\| < \infty}$$

a v tom případě má $\|T\|$ vlastnosti normy (ověřte sami)

Ⓓ $\Rightarrow$: T omez. $\left(\exists C \ \forall \|x\| \leq 1 \ \ \|Tx\| \leq C\right) \Rightarrow \|T\| \leq C$

$\Leftarrow$: $\|T\| < \infty$: $\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\| \ \ \forall x \in X$

tj. $\|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq K\|T\|$. ☒

Lemma

Buďte X, Y Banachovy. Pokud je $T: X \to Y$ lineární operátor, tak

$$\boxed{\overset{(1)}{T \text{ omezený}} \iff \overset{(2)}{T \text{ spojitý}} \iff \overset{(3)}{\|T\| < \infty}}$$

Ⓓ. Ekvivalenci (1) a (3) už jsme dokázali. Ukážeme:

(3) $\Rightarrow$ (2): Je-li T omezený, tak $\|T(x_n - x)\| \leq c\|x_n - x\|$, $c = \|T\|$,
z linearity $\|Tx_n - Tx\| \leq c\|x_n - x\|$
Pokud $x_n \to x$, tak odsud máme $Tx_n \to Tx$, ctd.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ze spojitosti plyne m.j., že pokud $x_n \to 0$, tak $Tx_n \to 0$. $(\forall x_n)$
Proto $\forall \varepsilon$ (např. pro $\varepsilon = 1$) $\exists \delta > 0$ $\|x_n\| < \delta \Rightarrow \|Tx_n\| < 1$
Buď nyní $\|x\| < K$, tak $\left\|\frac{x}{K}\delta\right\| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{Tx}{K}\delta\right\| < 1$

$$\|Tx\| < \frac{K}{\delta} =: c$$

☒

Označení:

$\mathcal{L}(X,Y) := \{T: X \to Y,\ X,Y \text{ NLP},\ T \text{ lineární a omezený}\}$.

Lze ukázat, že $\mathcal{L}(X,Y)$ sám o sobě je NLP s normou $\|T\|$, definovanou pomocí (*) na str. 5. Navíc, pokud Y je Banachův, tak i $\mathcal{L}(X,Y)$ je úplný v normě $\|T\|$, a tedy Banachův. Speciálně prostory operátorů $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ jsou vždy Banachovy.

Další používané značení:

$$\mathcal{L}'(X) := \mathcal{L}(X,\mathbb{K}),$$

$$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X).$$

(V) Věta konečné a nekonečné dimenze

- Buď $T: X \to Y$, X, Y Banachovy, T lineární; $\underline{\dim X < \infty}$ } Potom T je omezený a tedy i spojitý.

D. $x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, kde $n = \dim X$; $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ báze X.

$$\Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T x_j$$

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, \|Tx_j\| \leq \underbrace{\max_{j=1,\dots,n} \|Tx_j\|}_{=:c} \cdot \overbrace{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|}^{\text{jedna z norem na } X \ \|x\|_s}$$

c ... konečná a konstantní pro pevně zvolenou bázi

$$\leq c\|x\|_s \leq \tilde{C}\|x\|$$

ekvivalence všech norem pro $\dim X < \infty$ ☒

Pozn: V konečné dimenzi jsou tedy všechny lineární operátory spojité.
Přirozená otázka: platí to i pro $\dim X = +\infty$?
Ne.

- X, Y NLP, $\dim X = +\infty$, pak $\exists\, T: X \to Y$ lineární a neomezený. (V případě X, Y Banachovy tedy i nespojitý).

(P–) $X = C^1([a,b])$ s normou $\|f\| = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$. (V této normě není X úplný, proč?)

$Y = C([a,b])$ s touž normou (v ní je Y Banachův, proč?)

Buď nyní $f_n(x) = \sin nx$ $\quad f_n \in X$; $\|f_n\| = 1$

$f_n'(x) = n \cos nx$ $\quad f_n' \in Y$; $\|f_n'\| = n$

Omezená množina se zobrazila na neomezenou $\Rightarrow$ operátor je neomezený.

$\boxtimes$

Cvičení: $\dim X = \infty$, Y Banachův,

Vezměte $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ LN nekonečnou spočetnou množinu normovaných prvků v X.

BÚNO $\|x_j\| = 1$ (jinak vezmeme místo nich $\dfrac{x_j}{\|x_j\|}$)

Každou LN množinu lze podle tzv. Zornova lemmatu (je ekvivalentní s axiomem výběru) doplnit na bázi LP. Označme ji tedy prvky $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$, A … indexová množina.

Potom dle vlastností báze $B := \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ platí $\forall x \in X\ \exists n(x), m(x) \in \mathbb{N}$, $\exists a_j, b_j$ skaláry

$$x = \sum_{j=1}^{n(x)} a_j x_j + \sum_{k=1}^{m(x)} b_k z_k .$$

Definujme $\quad Tx := \sum\limits_{j=1}^{n(x)} a_j T x_j \quad$ pro každé $x \in X$.

Tím je definován T na celém X, pokud definujeme Tx_j a Tz_α.

Definujme je takto: $\quad Tx_j = j \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$Tz_\alpha = 0 \quad \forall z_\alpha, \alpha \in A$.

Potom T je lineární na X (ověřte), přičemž

$\|x_n\| = 1$, ale $\|Tx_n\| = n \quad \forall x_n$.

$\boxtimes$