

Ortogonalní systémy polynomů

1 Laguerrovy polynomy, $L_n^s(x)$

Generující rovnice:	$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$	$\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ (polynom pro $\alpha = -n, \gamma = s + 1$)
Vyjádření řadou:	$L_n^s = \frac{(s+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; s+1; x)$	Laguerrovy zobecněné pol. (klasické pro $s = 0$)
Explicitní vyjádření:	$L_n^s = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x (x^{s+n} e^{-x})^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$xL_n^s = -(n+1)L_{n+1}^s + (s+2n+1)L_n^s - (s+n)L_{n-1}^s$	
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n$	
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(0, +\infty)$, kde $\rho = x^s e^{-x}$	
Norma:	$\ L_n^s\ _\rho^2 = \Gamma(s+n+1)/n!$	

2 Hermiteovy polynomy, $H_n(x)$

Generující rovnice:	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$	
Vyjádření řadou:	$H_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} {}_1F_1(-k; 1/2; x^2)$ $H_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} x {}_1F_1(-k; 3/2; x^2)$	
Explicitní vyjádření:	$H_n = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$	
Vytvořující funkce:	$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$	
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(-\infty, +\infty)$, kde $\rho = e^{-x^2}$	
Norma:	$\ H_n\ _\rho^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$	

3 Legendreovy polynomy, $P_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$	
Vyjádření řadou:	$P_n = {}_2F_1(-n, n+1; 1; 1/2(1-x))$	
Explicitní vyjádření:	$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} ((1-x^2)^n)^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$	
Vytvořující funkce:	$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$	
Báze v prostoru:	$L^2(-1, 1)$, tj. $\rho = 1$	
Norma:	$\ P_n\ _\rho^2 = 2/(2n+1)$	

4 Čebyševovy polynomy 1. druhu, $T_n(x)$

Generující rovnice:	$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
Vyjádření řadou:	$T_n = {}_2F_1(-n, n; 1/2; 1/2(1 - x))$
Explicitní vyjádření:	$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
Rekurentní vztah:	$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$
Báze v prostoru:	$L_{\rho}^2(-1, 1)$, kde $\rho = (1 - x^2)^{-1/2}$
Norma:	$\ T_n\ _{\rho}^2 = \pi/2$ pro $n > 0$, $= \pi$ pro $n = 0$

5 Gegenbauerovy (=ultrasférické) λ -polynomy, $C_n^{(\lambda)}(x)$

Generující rovnice:	$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0$, $\lambda > -1/2$
Vyjádření řadou:	$C_n^{(\lambda)} = \binom{n + 2\lambda - 1}{n} {}_2F_1(-n, n + 2\lambda; \lambda + 1/2; 1/2(1 - x))$
Explicitní vyjádření:	$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - x^2)^{1/2 - \lambda} ((1 - x^2)^{\lambda + n - 1/2})^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n + 1)C_{n+1}^{(\lambda)} = 2(n + \lambda)x C_n^{(\lambda)} - (n + 2\lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x)t^n$
Báze v prostoru:	$L_{\rho}^2(-1, 1)$, kde $\rho = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}$
Norma:	$\ C_n^{(\lambda)}\ _{\rho}^2 = \frac{\lambda(2\lambda)_n}{n!(\lambda + n)} \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda + 1)}$