

**Zkušební témata**  
**Vybrané partie z matematiky pro fyziky**  
**NMAF006, LS 2013/14**

1. Věta:  $X$  Banachův,  $T \in L(X)$ , že platí: buď  $\|T\| < 1$  nebo  $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| < \infty$  nebo  $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j x\| < \infty$  pro všechna  $x \in X$ . Potom... Dokončete znění a předvedte hlavní myšlenku důkazu této věty.
2. Pro  $T \in L(X)$  ( $X$  Banachův) sestavte tabulku  $3 \times 3$ , dávající do souvislosti výroky „ $T_\lambda$  je prostý resp. má spojitou inverzi“ a „ $T_\lambda$  je na  $X$ , resp. má či nemá v  $X$  hustý obor hodnot“. Definujte bodové, residuální a spojitě spektrum.
3. Formulujte větu a lemma, které v předchozí tabulce „vyškrtávají dvě okýnka“. Větu nedokazujte, důkaz lemmatu naznačte.
4. Definujte pojem kompaktního operátoru, ukažte, jak bude pro kompaktní operátor vypadat tabulka pro  $T_\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ , z bodu 2 výše. Tvar této tabulky podpořte nějakými tvrzeními, která však nemusíte dokazovat.
5. Napište, jak vypadá spektrum kompaktního operátoru. Sepište příslušná tvrzení, nemusíte je dokazovat.
6. Definujte duální zobrazení k danému lineárnímu omezenému zobrazení mezi Banachovými prostory, ukažte, že v Hilbertových prostorech vždy existuje jediné duální (adjungované, hermiteovsky adjungované) zobrazení.
7. Definujte, co je hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na  $H$  a sepište vlastnosti spektra pro kompaktní hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na  $H$ .
8. Formulujte Hilbert-Schmidtovu spektrální větu (tj. větu, obsahující rovnost  $H = \Lambda \oplus \text{Ker } T$ ) a poodhalte strategii důkazu.
9. Formulujte pojem adjungovaného operátoru k (obecně neomezenému) lineárnímu operátoru  $T : \mathcal{D}(T) \subset H \rightarrow H$ ; formulujte tvrzení o tom, kdy je  $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$ .
10. Formulujte a vysvětlete pojmy symetrického a samoadjungovaného operátoru (a rozdíly mezi nimi). Formulujte pojem uzavřeného operátoru a větu o ekvivalenci tvrzení „ $T$  má spojitou inverzi“.
11. Definujte lineární diferenciální výraz  $\ell(y)$  řádu  $n$  a k němu adjungovaný výraz  $\ell^*(y)$ . Vysvětlete rozdíl mezi lineárním diferenciálním výrazem a lineárním diferenciálním operátorem.
12. Ukažte, že  $\ell^*(y)$  je pro  $\ell(y)$  jediný lineární diferenciální výraz, pro který  $(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z))$  pro všechna  $y, z \in C_{\text{cpt}}^\infty(a, b)$ .
13. Ukažte, že každý OG systém polynomů v prostoru  $L_\rho^2(a, b)$  nutně splňuje rekurentní vzorec „se čtyřmi členy“.
14. Definujte hypergeometrickou řadu a Pochhammerův symbol. Ukažte, že řešení Gaussovy redukované rovnice lze nalézt ve tvaru hypergeometrické řady.