10 Funkce více proměnných

10.1 Základní pojmy

Definice. Eukleidovskou vzdáleností bodů $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ budeme rozumět číslo

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}\,.$$

Poznámka. (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$,

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$,

(iii) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n : \ \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\|$.

Definice. (i) Nechť $\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$. Množinu $B_r(\vec{x}) \equiv \mathcal{U}^r(\vec{x})$ definovanou předpisem

$$B_r(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{x} - \vec{y}\| < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** $\vec{x}$ **a poloměrem** r nebo také **otevřeným okolím bodu** $\vec{x}$.

(ii) Nechť $\vec{x} \in R^n,\ r > 0$. Množinu $\overline{B}_r(\vec{x})$ definovanou předpisem

$$\overline{B}_r(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** $\vec{x}$ **a poloměrem** r.

Definice. (i) Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B_r(x) \subset M$.

(ii) Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **otevřená**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

(iii) **Vnitřkem množiny** M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$.

Poznámka. (i) Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená $\iff M = \operatorname{int} M$.

(ii) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny.

(iii) Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in A$, jsou otevřené. Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina.

(iv) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny $G_i,\ i = 1, \dots, m$, jsou otevřené. Pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ je otevřená množina. (Průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina: rozmyslete si, že platí: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$).

Definice. (i) Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B_r(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a zároveň $B_r(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

(ii) **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$ nebo ∂M.

(iii) **Uzávěrem množiny** M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

(iv) Řekneme, že množina M je **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body (tj. $H(M) \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Poznámka. (i) Množina $F \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená, právě když $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená.

(ii) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené (i otevřené).

(iii) Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $F_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené. Pak $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je uzavřená množina.

(iv) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny F_i, $i = 1, \ldots, m$, jsou uzavřené. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. (Sjednocení nekonečně mnoha uzavřených množin nemusí být uzavřená množina: rozmyslete si, že $\bigcup_{n=1}^\infty \langle \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\rangle = (0,1)$).

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. **Vzdáleností bodu $\vec{x}$ od množiny** A rozumíme číslo

$$\rho(\vec{x}, A) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\|;\ \vec{y} \in A\}.$$

Diametrem (průměrem) neprázdné množiny $B \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$\operatorname{diam} B = \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\|;\ \vec{x}, \vec{y} \in B\}$$

a klademe $\operatorname{diam}\emptyset = 0$. Pokud $\operatorname{diam} B < \infty$, pak říkáme, že B je **omezená** množina.

10.2 Konvergence v $\mathbb{R}^n$

Definice. Nechť $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ **konverguje** k $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_n \to \vec{y}$, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \|\vec{x}_n - \vec{y}\| = 0$. Prvek $\vec{y}$ nazýváme **limitou posloupnosti** $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$. **Konvergentní posloupností v** $\mathbb{R}^n$ rozumíme každou posloupnost prvků $\mathbb{R}^n$, která má limitu v $\mathbb{R}^n$.

Věta 10.1 (vlastnosti konvergence)**.** *Platí:*

(i) Nechť $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a existují $n_0 \in \mathbb{N}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\vec{x}_n = \vec{y}$ pro každé $n \geq n_0$. Pak $\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = \vec{y}$.

(ii) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

(iii) Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Množina A je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z A leží v A.

(iv) Nechť $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ prvků $\mathbb{R}^n$, tj., $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Jestliže $\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = \vec{y}$, pak také $\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_{n_k} = \vec{y}$.

10.3 Spojitá zobrazení

Definice. Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $M \subset \mathbb{R}^n$.
Řekneme, že

- $\vec{f}$ je **spojité v bodě $\vec{a}$ vzhledem k množině** M, jestliže $\vec{a} \in M$ a platí

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall\vec{x} \in M : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}))\| < \varepsilon;$$

- f je **spojité v bodě** $\vec{a}$, jestliže je spojité v $\vec{a}$ vzhledem k $\mathbb{R}^n$. $\vec{f}$ je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $\vec{a} \in M$ vzhledem k M.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\vec{x}$ je **hromadným bodem množiny** M, jestliže

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 :\ M \cap (B_\varepsilon(\vec{x}) \setminus \{\vec{x}\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji **derivací množiny** M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

Definice. Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ je **limitou zobrazení $\vec{f}$ v bodě $\vec{a}$ vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall \vec{x} \in A, \vec{x} \neq \vec{a}\colon \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon.$$

Je-li $A = \mathbb{R}^n$, říkáme, že $\vec{f}$ má **v bodě $\vec{a}$ limitu** $\vec{b}$.

Označení. Pokud limita $\vec{f}$ v bodě $\vec{a}$ vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}, \vec{x}\in A} \vec{f}(\vec{x})$. Místo zápisu $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}, \vec{x}\in \mathbb{R}^n} \vec{f}(\vec{x})$ píšeme jen $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$.

Věta 10.2 (Heineova věta o limitě)**.** *Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathcal{D}(\vec{f})$, $\vec{a} \in A'$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}, \vec{x}\in A} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$,

(ii) *pro každou posloupnost $\{\vec{x}_n\}$ prvků množiny A, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$, splňující $\lim \vec{x}_n = \vec{a}$, platí $\lim \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{b}$.*

Věta 10.3 (Heineova věta o spojitosti)**.** *Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathcal{D}(\vec{f})$, $\vec{a} \in A'$. Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) *$\vec{f}$ je spojitá v bodě $\vec{a}$ vzhledem k množine A,*

(ii) *pro každou posloupnost $\{\vec{x}_n\}$ prvků množiny A, splňující $\lim \vec{x}_n = \vec{a}$, platí $\lim \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{f}(\vec{a})$.*

Poznámka. Platí standardní věty o aritmetice limit, o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu.

Věta 10.4 (spojitost složeného zobrazení v bodě)**.** *Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $\vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jsou vektorové funkce více proměnných. Nechť $\vec{a} \in P \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(\vec{a}) \in Q \subset \mathbb{R}^m$, a nechť platí:*

- *existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\vec{f}(B_\delta(\vec{a}) \cap P) \subset Q$,*
- *$\vec{f}$ je spojité v bodě $\vec{a}$ vzhledem k P,*
- *$\vec{g}$ je spojité v bodě $\vec{f}(\vec{a})$ vzhledem k Q.*

Pak zobrazení $\vec{g} \circ \vec{f}$ je spojité v bodě $\vec{a}$ vzhledem k P.

10.4 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\vec{a}$ podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{e}^{\,i}) - f(\vec{a})}{t},$$

pokud tato existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci, která bodu $\vec{x}$ přiřazuje hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$.

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě** $\vec{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - L(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0.$$

Věta 10.5 (vztah totálního diferenciálu a parciální derivace). *Nechť L je diferenciál funkce f v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom existují parciální derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$$

a pro každé $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\underbrace{L(h_1, \dots, h_n)}_{\textit{totální diferenciál}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n}_{\textit{parciální diferenciály}}.$$

Jiná značení: ($L \equiv f'(\vec{a}) \equiv df(\vec{a})$.)

$$f'(\vec{a})(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n.$$

$\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \equiv (dx_1, \dots, dx_n) \implies$

$$\underbrace{df(\vec{a})(dx_1, \dots, dx_n)}_{\text{totální diferenciál}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})dx_n}_{\text{parciální diferenciály}}.$$

Věta 10.6. *Má-li funkce f v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál, je f v bodě $\vec{a}$ spojitá.*

Věta 10.7. *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\vec{a}$. Potom má f v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.*

Pouhá existence parciálních derivací (tj. parciálních diferenciálů) ještě neimplikuje existenci totálního diferenciálu!

Definice.

- Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\vec{a}$ podle vektoru $\vec{v}$** rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}.$$

- Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\vec{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce f v bodě $\vec{a}$** jako vektor

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) \equiv \nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 10.8. *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Nechť existuje $f'(\vec{a})$. Pak platí*

(i) $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = f'(\vec{a})(\vec{v}) \equiv df(\vec{a})(\vec{v})$,

(ii) $\max\{D_{\vec{v}} f(\vec{a});\ \|\vec{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\vec{a})\|$.

Poznámka. Rozmyslete si k důkazu bodu (ii):
$\|\vec{v}\| = 1 \implies D_{\vec{v}} f(\vec{a}) \le \|\nabla f(\vec{a})\|\,\|\vec{v}\| = \|\nabla f(\vec{a})\|$,
$\|\nabla f(\vec{a})\| \neq 0$, pak $\vec{v} := \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|} \implies D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})\| \cdot \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|} = \|\nabla f(\vec{a})\|$.

Geometrický význam gradientu.

- Gradient funkce v bodě určuje směr největšího růstu funkce.

- Velikost gradientu funkce v bodě je zároveň hodnotou (této největší) derivace ve směru gradientu.

Definice. Nechť $\vec{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací (totálním diferenciálem) zobrazení $\vec{f}$ v bodě** $\vec{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{||\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) - L(\vec{h})||}{||\vec{h}||} = 0.$$

Úmluva.

Pod termínem "derivace" budeme pro funkce $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ rozumět totéž, co pod termínem "(totální) diferenciál".

Věta 10.9. *Nechť $\vec{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, které má v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci $L \equiv \vec{f}\,'(a)$. Potom je $\vec{f}\,'(a)$ reprezentováno (Jacobiho) maticí*

$$\frac{D\vec{f}}{Dx}(\vec{a}) \equiv \frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

Věta 10.10. *Nechť $\vec{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{f}\,'(\vec{a})$ existuje. Potom $\vec{f}$ je spojité v $\vec{a}$.*

Věta 10.11. *Nechť $\vec{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,k$, jsou spojité v $\vec{a}$. Potom $\vec{f}\,'(\vec{a})$ existuje.*

Věta 10.12 (derivace složeného zobrazení)**.** *Nechť $\vec{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $\vec{g}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^s$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{b} = f(\vec{a}) \in \mathbb{R}^k$. Jestliže existují $\vec{f}\,'(\vec{a})$ a $\vec{g}\,'(\vec{b})$, pak existuje $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{a})$ a platí $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{a}) = \vec{g}\,'(\vec{b}) \circ \vec{f}\,'(\vec{a})$.*

Důsledek 10.13 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť funkce $f_1,\dots,f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $\vec{b} = (f_1(\vec{a}),\dots,f_k(\vec{a}))$ totální diferenciál. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem*

$$h(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}),\dots,f_k(\vec{x})).$$

Potom má h v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál a pro $i \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\vec{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

10.5 Parciální derivace vyšších řádů

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1,\dots,n\}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\vec{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** $\mathcal{C}^p$, jestliže všechny parciální derivace funkce f až do řádu p včetně jsou spojité na G. Množinu všech funkcí $f\colon G \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^p$ označujeme $\mathcal{C}^p(G)$ a klademe $\mathcal{C}^\infty(G) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^p(G)$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $f\colon G \to \mathbb{R}^k$. Řekneme, že f je zobrazení **třídy** $\mathcal{C}^p$, jestliže všechny jeho složky $f_1,\dots,f_k$ jsou třídy $\mathcal{C}^p$.

Věta 10.14. *Nechť* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^k$ *jsou otevřené množiny,* $f\colon G \to \mathbb{R}^k$, $g\colon H \to \mathbb{R}^s$ *jsou* ***třídy*** $\mathcal{C}^p$ *a platí* $f(G) \subset H$. *Pak zobrazení* $g \circ f$ *je třídy* $\mathcal{C}^p$.

Věta 10.15. *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $p \in \mathbb{N}$, *a funkce* $f \in \mathcal{C}^p(G)$. *Nechť* $\vec{a} \in G$. *Potom hodnota*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\vec{a})$$

je nezávislá na pořadí indexů $i_1, i_2, \dots, i_p$.

Poznámka. Tato tzv. záměnnost parciálních derivací obecně neplatí pro funkce, jejichž parciální derivace (až do příslušného řádu včetně) nejsou spojité.

Definice. Nechť všechny níže uvedené parciální derivace existují.

- Buď $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. **Divergencí** $\vec{f}$ v bodě $\vec{a}$ nazvu

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{a}) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\vec{a})\,.$$

- Buď $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. **Rotací** $\vec{f}$ v bodě $\vec{a}$ nazvu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{a}) \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} (\vec{a}) = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)(\vec{a})\,. \end{aligned}$$

Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť existují parciální defivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, $j = 1, \dots, n$, v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Hodnotou **Laplaceova operátoru** Δ, aplikovaného na funkci $\vec{f}$ v bodě $\vec{a}$ (čteme "Laplace $f(\vec{a})$") nazvu hodnotu

$$\Delta f(\vec{a}) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\vec{a})\,.$$

Poznámka.

- Operátory Δ, div a $\operatorname{grad} \equiv \nabla$ lze aplikovat i na vektorové funkce, "po složkách", tj. např. pro $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je $\Delta \vec{f}(\vec{a})$ k-rozměrný vektor se složkami $\Delta f_j(\vec{a})$, $j = 1, \dots, k$.
- Při formálním označení $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ lze psát tyto formální identity:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f\,, & \operatorname{div} \vec{f} &= \nabla \cdot \vec{f}\,, \\ \Delta f &= (\nabla \cdot \nabla) f\,, & \operatorname{rot} \vec{f} &= \nabla \times \vec{f}\,. \end{aligned}$$

Cvičení. Ověřte, že pro všechny funkce, mající v daném bodě *spojité* parciální derivace nejvyššího v identitách použitého řadu, platí tyto identity:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla f(\vec{x}) &= \Delta f(\vec{x})\,, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) &= 0\,, \\ \operatorname{rot}\, \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) &= \nabla \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) - \Delta \vec{f}(\vec{x})\,. \end{aligned}$$

10.6 Věty o implicitně zadaných funkcích

Věta 10.16 (o implicitně zadané funkci)**.** *Nechť* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*,* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbb{R}$*,* $\tilde{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n$*,* $\tilde{y} \in \mathbb{R}$*,* $[\tilde{\vec{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{\vec{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ *bodu* $\tilde{\vec{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbb{R}$ *bodu* $\tilde{y}$*, že* $\forall \vec{x} \in U\ \exists!\, y \in V$ *s vlastností* $F(\vec{x}, y) = 0$*. Označíme-li toto* y *jako* $\varphi(\vec{x})$*, je* $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$*, a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\vec{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}, \qquad \textit{kde } j \in \{1, \dots, n\},\ \vec{x} \in U.$$

Věta 10.17 (o implicitně zadaných funkcích)**.** *Nechť* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*,* $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $\vec{F}\colon G \to \mathbb{R}^m$*,* $\tilde{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n$*,* $\tilde{\vec{y}} \in \mathbb{R}^m$*,* $[\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}] \in G$ *a platí:*

(i) $\vec{F} \in \mathcal{C}^p(G)$,

(ii) $\vec{F}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}) = \vec{0}$,

(iii)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ *bodu* $\tilde{\vec{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbb{R}^m$ *bodu* $\tilde{\vec{y}}$*, že* $\forall\, \vec{x} \in U\ \exists!\, \vec{y} \in V$ *s vlastností* $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$*. Označíme-li toto* $\vec{y}$ *jako* $\vec{\varphi}(\vec{x})$*, je* $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^p(U)$*.*

10.7 Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subset D(f)$.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \le f(x) \qquad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

Definice. • Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap M\colon f(y) \le f(x)$$
$$(\text{resp. } \forall y \in B_\delta(x) \cap M\colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) funkce f na množině M.

Definice. • Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) < f(x)$$
$$(\text{resp. } \forall y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

- Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je **kompaktní**, pokud M je uzavřená a omezená množina v $\mathbb{R}^n$.

Věta 10.18. *Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá na M. Pak f nabývá na M svého maxima i minima (a tedy je m.j. omezená na M).*

Věta 10.19. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\vec{a} \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{a}$ lokální extrém (vzhledem ke G). Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Definice. Bod $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **stacionárním bodem** funkce f, pokud $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$, tj. pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a}) = 0$ pro všechna $j = 1, \dots, n$.

Definice. Je-li $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ symetrická matice, pak funkci $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$Q(\vec{h}) := (\mathbf{A} \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

nazýváme **kvadratickou formou** (definovanou maticí $\mathbf{A}$).

Definice. Buď $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Řekneme, že Q je

- **pozitivně (negativně) definitní**, pokud $Q(\vec{h}) > 0$ (< 0) pro všechna $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq 0$;
- **pozitivně (negativně) semidefinitní**, pokud $Q(\vec{h}) \geq 0$ (≤ 0) pro všechna $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$;
- **indefinitní**, pokud existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(\vec{h}) > 0$ a $Q(\vec{k}) < 0$.

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **spojité** druhé parciální derivace v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom zobrazení $d^2 f(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$d^2 f(\vec{a})(\vec{h}, \vec{h}) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_i h_j$$

nazýváme **druhým diferenciálem** funkce f v bodě $\vec{a}$.

Poznámka. Zobrazení $h :\mapsto d^2 f(\vec{a})(\vec{h}, \vec{h})$ je kvadratická forma, definovaná tzv. Hessovou maticí druhých derivací, $H(f)(\vec{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$.

Věta 10.20 (postačující podmínky lokálního extrému)**.** *Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\vec{a} \in G$ a nechť $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ (tj. $\vec{a}$ je stacionárním bodem f). Potom platí:*

- *Je-li kvadratická forma $\vec{h} \mapsto f''(\vec{a})(\vec{h}, \vec{h})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\vec{a}$ ostrého lokálního maxima.*

- *Je-li kvadratická forma* $\vec{h} \mapsto f''(\vec{a})(\vec{h},\vec{h})$ *pozitivně definitní, nabývá* f *v bodě* $\vec{a}$ *ostrého lokálního minima.*
- *Je-li kvadratická forma* $\vec{h} \mapsto f''(\vec{a})(\vec{h},\vec{h})$ *indefinitní, nenabývá* f *v bodě* $\vec{a}$ *ani lokálního maxima, ani lokálního minima.*

Poznámka. K určení definitnosti kvadratické formy se často hodí následující pravidlo:

- Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ matice kvadratické formy. Označme $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}^{1\times 1}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}^{2\times 2}\ldots$, $\mathbf{A}_n \in \mathcal{M}^{n\times n}$ její hlavní diagonální podmatice; nechť dále všechny determinanty $\det \mathbf{A}_1, \ldots \det \mathbf{A}_n$ jsou nenulové.
- Označme číslem p počet znaménkových změn v posloupnosti $\{1, \det \mathbf{A}_1, \ldots \det \mathbf{A}_n\}$.

Potom platí:

- Kvadratická forma definovaná maticí $\mathbf{A}$ je *pozitivně definitní* $\iff p = 0$.
- Kvadratická forma definovaná maticí $\mathbf{A}$ je *negativně definitní* $\iff p = n$.

Věta 10.21 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** *Nechť* $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{\vec{z} \in G;\ g_1(\vec{z}) = 0, g_2(\vec{z}) = 0, \ldots, g_m(\vec{z}) = 0\}$$

a bod $\vec{\tilde{z}} \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině* M. *Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(I) *vektory* $\nabla g_1(\vec{\tilde{z}}), \nabla g_2(\vec{\tilde{z}}), \ldots, \nabla g_m(\vec{\tilde{z}})$ *jsou lineárně závislé,*

(II) *existují reálná čísla* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *splňující*

$$\nabla f(\vec{\tilde{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\vec{\tilde{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{\tilde{z}}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{\tilde{z}}) = \vec{0}.$$

10.8 Taylorův polynom

Definice. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **spojité** k-té parciální derivace v bodě $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom zobrazení $d^k f(\vec{a}) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$d^k f(\vec{a})(\underbrace{\vec{h}, \ldots, \vec{h}}_{k\text{-krát}}) := \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\vec{a})}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} h_{j_1} \cdots h_{j_k}\,,$$

nazýváme k**-tým diferenciálem** funkce f v bodě $\vec{a}$.

Definice. Nechť pro $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ existuje $f^{(k)}(\vec{a})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom **Taylorovým polynomem** k**-tého řádu funkce** f **v bodě** $\vec{a}$ rozumíme polynom n proměnných

$$T_k^{f,\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\, d^j f(\vec{a})(\underbrace{\vec{x}-\vec{a}, \ldots, \vec{x}-\vec{a}}_{j-\text{krát}}).$$

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud pro každé dva body $\vec{x}, \vec{y} \in M$ patří do M i celá úsečka, která tyto dva body spojuje.

Věta 10.22 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená konvexní množina,* $f \in \mathcal{C}^{k+1}(G)$ *(*$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*),* $\vec{a} \in G$*,* $\vec{x} \in G$*. Potom existuje* $\vec{\xi}$ *ležící na úsečce spojující body* $\vec{a}$*,* $\vec{x}$ *takové, že*

$$f(\vec{x}) = T_k^{f,\vec{a}}(\vec{x}) + \frac{1}{(k+1)!}\, d^{k+1} f(\vec{\xi})(\underbrace{\vec{x}-\vec{a},\dots,\vec{x}-\vec{a}}_{(k+1)-\text{krát}}).$$

Věta 10.23 (důsledek: věta o přírůstku funkce)**.** *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená konvexní množina,* $f \in \mathcal{C}^1(G)$*,* $\vec{a} \in G$*,* $\vec{x} \in G$*. Potom existuje* $\vec{\xi}$ *ležící na úsečce spojující body* $\vec{a}$*,* $\vec{x}$ *takové, že*

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = f'(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{a}).$$

Věta 10.24 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť* f *je funkce z* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}$*, která je třídy* $\mathcal{C}^k$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) na jistém okolí bodu* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$*. Potom platí*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - T_k^{f,\vec{a}}(\vec{x})}{||\vec{x}-\vec{a}||^k} = 0.$$