Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a
ZS 2008-09, 20. 3. 2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{75}+n^{60}}-\sqrt[3]{n^{75}-n^{60}}\right)\cdot\frac{(n^3+n^2)^{20}-(n^2+n)^{30}}{(n+1)^{70}-(n-1)^{70}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Označíme $a_n := \sqrt[3]{n^{75}+n^{60}}-\sqrt[3]{n^{75}-n^{60}}$, dále $b_n := (n^3+n^2)^{20}-(n^2+n)^{30}$, a konečně $c_n := (n+1)^{70}-(n-1)^{70}$. Rozdíl v a_n rozšíříme s využitím vztahu $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ pro $A=\sqrt[3]{n^{75}+n^{60}}$, $B=\sqrt[3]{n^{75}-n^{60}}$, a dostaneme:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2n^{60}}{\sqrt[3]{(n^{75}+n^{60})^2}+\sqrt[3]{(n^{75}+n^{60})(n^{75}-n^{60})}+\sqrt[3]{(n^{75}-n^{60})^2}} = \\
&= \frac{2n^{10}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^{15}}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^{15}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{15}}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^{15}}\right)^2}} = \\
&= n^{10}\cdot\frac{2}{A_n}, \qquad \text{kde} \quad \lim_{n\to\infty} A_n = 3\,.
\end{aligned}$$

Použili jsme faktu, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ pro $a>0$, větu o aritmetice limit a spojitost třetí odmocniny.

Výrazy v b_n i c_n upravíme podle binomické věty:

$$\begin{aligned}
b_n &= (n^3+n^2)^{20}-(n^2+n)^{30} = \left(n^{60}+20n^{3\cdot19+2}+\sum_{k=0}^{58}\alpha_k n^k\right)-\left(n^{60}+30n^{2\cdot29+1}+\sum_{k=0}^{58}\beta_k n^k\right)= \\
&= -10n^{59}+\sum_{k=0}^{58}\gamma_k n^k\,, \qquad \alpha_k,\beta_k,\gamma_k\in\mathbf{Z}\,, \\
c_n &= (n+1)^{70}-(n-1)^{70} = \left(n^{70}+70n^{69}+\sum_{k=0}^{68}\delta_k n^k\right)-\left(n^{70}-70n^{69}+\sum_{k=0}^{68}\lambda_k n^k\right)= \\
&= 140n^{69}+\sum_{k=0}^{68}\vartheta_k n^k\,, \qquad \delta_k,\gamma_k,\vartheta_k\in\mathbf{Z}\,.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme, opět podle věty o aritmetice limit,

$$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{A_n}\cdot\frac{-10n^{69}+\sum\limits_{k=0}^{58}\gamma_k n^{k+10}}{140n^{69}+\sum\limits_{k=0}^{68}\vartheta_k n^k}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{-10+\sum\limits_{k=0}^{58}\gamma_k n^{k+10-69}}{140+\sum\limits_{k=0}^{68}\vartheta_k n^{k-69}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-10}{140}=-\frac{1}{21}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 5 body
- úprava b_n .... 5 bodů
- úprava c_n .... 4 body
- dopočítání .... 1 bod

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ pro $a>0$ .... 1 bod
- spojitost odmocnin .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x\cdot(1-\cos x)}.$$

(15 bodů)

Řešení : Limita je typu „$\frac{0}{0}$“, lze tedy použít l'Hospitalovo pravidlo (opět s konvencí, že „$\overset{\text{l'H}}{=}$“ znamená „rovná se, pokud existuje limita vpravo“). Před „bezmyšlenkovitým“ použitím l'Hospitalova pravidla však limitu upravíme, abychom derivovali jednodušší výraz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x\cdot(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3}}_{=:\frac{f(x)}{g(x)}} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{=:h(x)} .$$

Platí $\lim_{x\to 0} h(x) = 2$, a na $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ použijeme $3\times$ za sebou l'Hospitalovo pravidlo „$\frac{0}{0}$“, protože:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2^x - 2^{\sin x}\,, & f(0) &= 0\,,\\
f'(x) &= 2^x \log 2 - 2^{\sin x} \log 2 \cdot \cos x\,, & f'(0) &= 0\,,\\
f''(x) &= \log 2\,(2^x \log 2 - 2^{\sin x} \log 2 \cdot \cos^2 x + 2^{\sin x} \cdot \sin x)\,, & f''(0) &= 0\,,\\
f'''(x) &= \log 2\,(2^x \log^2 2 - 2^{\sin x} \log^2 2 \cdot \cos^3 x + 2\cdot 2^{\sin x} \log^2 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \\
&\quad + 2^{\sin x} \log 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2^{\sin x} \cdot \cos x)\,, & f'''(0) &= \log 2\,.
\end{aligned}$$

(V bodě spojitosti funkce lze počítat limitu dosazením funkční hodnoty.) Evidentně, $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, $g'''(0) = 6$, tedy celkově, podle věty o aritmetice limit,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x\cdot(1-\cos x)} = \frac{\log 2}{6} \cdot 2 = \frac{\log 2}{3}\,.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- l'Hospital číslo 1 .... 4 body
- l'Hospital číslo 2 .... 4 body
- l'Hospital číslo 3 .... 4 body
- úpravy, dopočet .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- ověření, že jde o l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“ .... 1 bod
- limita v bodě spojitosti .... 1 bod
- věta o aritmetice limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^2}$. Pro velká n se totiž

$$a_n := \frac{n!+1}{(n+2)!+2} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{což se „chová jako“} \quad \frac{1}{n^2} =: b_n\,.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!+1)\,n^2}{(n+2)!+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n!}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2\cdot n!}} = 1\,, \tag{1}$$

s využitím faktu, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) .... 5 bodů
- závěr .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ apod. .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: druhá odmocnina je definovaná pro nezáporná reálná čísla, a jmenovatel zlomku musí být nenulový, tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$.

- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (je součtem, součinem, podílem a složením spojitých funkcí), není sudá, lichá, periodická. Platí, že $f \geq 0$ na celém definičním oboru, přičemž $f > 0$ právě když $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$, $f(x) = 0$ právě když $x = 0$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru, obor hodnot, asymptota:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+} \frac{|x|}{\sqrt{x^3+1}} = +\infty\,.$$
Protože je f spojitá na $\langle -1, +\infty)$, a $f(0) = 0$, dává věta o nabývání mezihodnot, že oborem hodnot f jsou všechna nezáporná reálná čísla, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, +\infty)$. Limita výše zároveň říká, že $a := \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$. Protože $b := \lim_{x\to+\infty}(f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, existuje asymptota v $+\infty$, a sice $y = 0$.

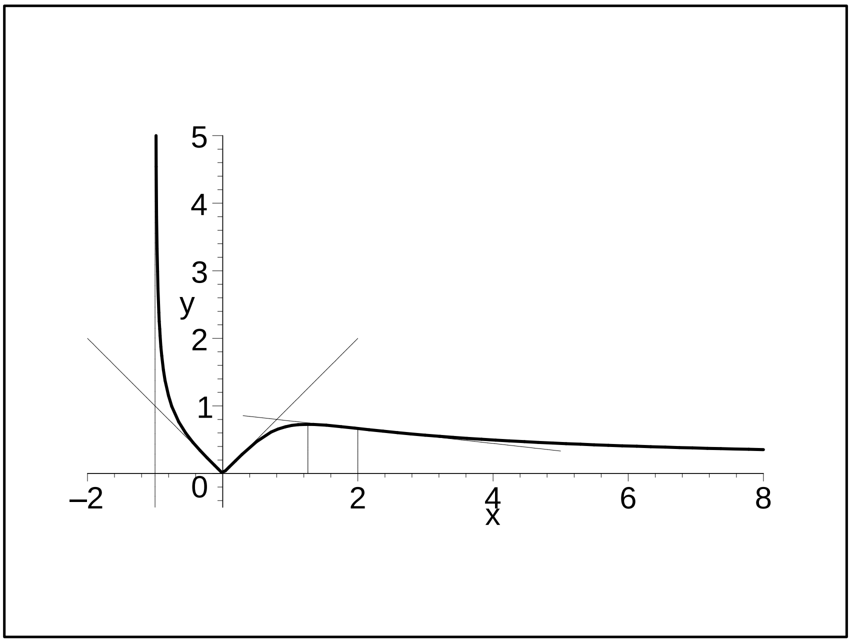
- První derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ je
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}} \cdot \frac{2x(x^3+1) - 3x^2\cdot x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{x^3+1}}{|x|(x^3+1)^2}(2-x^3) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \frac{(2-x^3)}{(x^3+1)^{3/2}}\,.$$

- Protože funkce f je spojitá (mimo jiné i) v bodě 0, a protože níže uvedené limity existují, platí:
$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm 1,$$
tedy $f'(0)$ neexistuje.

- Funkce f tedy roste na $(0, \sqrt[3]{2})$ a klesá na $(-1, 0)$ a na $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. V bodě 0 je lokální (i globální) minimum 0, a v bodě $\sqrt[3]{2}$ je lokální maximum hodnoty $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{3}} \approx 0.727$. Funkce nemá globální maximum.

- Druhá derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ dostaneme
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \frac{(-3x^2)(x^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2-x^3)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \\ &= -\frac{3x^2}{2}\operatorname{sgn} x \cdot \frac{2(x^3+1) + 3(2-x^3)}{2(x^3+1)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -\frac{3x^2}{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}}\cdot(8-x^3)\operatorname{sgn} x\,. \end{aligned}$$
Funkce je tedy konkávní na intervalu $(0, 2)$, a konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$. Funkce má inflexní bod $x = 2$ ($f'(2) = -\frac{1}{9}$).

• Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 1 bod
- limity v krajních bodech def. oboru .... 1 bod
- asymptota .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranná derivace v 0 (limity derivace) .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- inflexní bod .... 1 bod
- graf .... 2 body
