Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a
ZS 2008-09, 16. 2. 2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left((n^5+n^3)^{20}-(n^4+1)^{25}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+n+2}\right)}{(n+2)^{100}-(n+1)^{100}-100n^{99}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Označíme $a_n := (n^5+n^3)^{20}-(n^4+1)^{25}$, $b_n := \sqrt[3]{n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+n+2}$, a dále $c_n := (n+2)^{100}-(n+1)^{100}-100n^{99}$. Rozdíl třetích odmocnin (tj. b_n) rozšíříme výrazem, který tvoří jmenovatele následujícího zlomku:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n^2-n-3}{\sqrt[3]{\left(n^3+n^2-1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(n^3+n^2-1\right)\left(n^3+n+2\right)}+\sqrt[3]{\left(n^3+n+2\right)^2}} = \\ &= \frac{1-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Tato standardní úprava tedy ihned dává, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Použili jsme faktu, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ pro $a>0$, větu o aritmetice limit a spojitost třetí odmocniny.

V čitateli i jmenovateli zlomku $\frac{a_n}{c_n}$ použijeme binomickou větu. Stojí za to všimnout si, že sté mocniny n se „odečtou“ jak v čitateli tak ve jmenovateli, a že navíc ve jmenovateli se „odečtou“ i členy obsahující n^{99} (vidíte to?). Pečlivě proto sepíšeme pouze mocniny n^k pro $k\geq 98$, nižší mocniny n pak tvoří „ostatní členy“ A_n, B_n, C_n, D_n:

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{\left(n^{100}+20n^{95}n^3+A_n\right)-\left(n^{100}+B_n\right)}{\left(n^{100}+200n^{99}+4\binom{100}{2}n^{98}+C_n\right)-\left(n^{100}+100n^{99}+\binom{100}{2}n^{98}+D_{nn}\right)-100n^{99}},$$

kde

$$A_n=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{k}n^{5\cdot(20-k)}n^{3k}=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{k}n^{100-2k}, \qquad B_n=\sum_{k=1}^{25}\binom{25}{k}n^{100-4k},$$

$$C_n=\sum_{k=3}^{100}\binom{100}{k}2^k n^{100-k}, \qquad D_n=\sum_{k=3}^{100}\binom{100}{k}n^{100-k}.$$

Celkově tedy dostaneme

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{20n^{98}+\sum\limits_{j=0}^{96}\alpha_j n^j}{3\binom{100}{2}n^{98}+\sum\limits_{j=0}^{97}\gamma_j n^j} = \frac{20+\sum\limits_{j=0}^{96}\alpha_j n^{j-98}}{3\binom{100}{2}+\sum\limits_{j=0}^{97}\gamma_j n^{j-98}}.$$

Zde α_j, γ_j jsou nějaká celá čísla (možná i některá rovná nule). V čitateli i jmenovateli opět vidíme členy, na jejichž chování lze aplikovat znalost, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ pro $a>0$. Věta o aritmetice limit tedy dá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=\frac{20}{3\binom{100}{2}}. \tag{2}$$

Celkem tedy máme, opět podle věty o aritmetice limit, s využitím (1), (2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left((n^5+n^3)^{20}-(n^4+1)^{25}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+n+2}\right)}{(n+2)^{100}-(n+1)^{100}-100n^{99}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\, b_n}{c_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{20}{3\binom{100}{2}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{20}{9\binom{100}{2}} = \frac{2}{4455}\,.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n, c_n .... 7 bodů
- výpočet b_n .... 5 bodů
- dopočítání .... 3 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ pro $a>0$ .... 1 bod
- spojitost odmocnin .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)^{x+\frac{2}{x}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Protože $\lim_{x\to 0}(5e^{\frac{x}{x+2}}-4)=1$, je na nějakém prstencovém okolí nuly funkce $(5e^{\frac{x}{x+2}}-4)$ kladná, a proto je obecná mocnina za znamením limity definována korektně. Také odtud vidíme, že limita, kterou máme spočítat, je typu „$1^{\pm\infty}$“. Tedy platí:

$$A:=\lim_{x\to 0}\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)^{x+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\left(x+\frac{2}{x}\right)\log\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)}=e^{B}\,, \tag{3}$$

jak plyne ze spojitosti funkce exp, pokud ovšem existuje vlastní

$$B:=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{2}{x}\right)\log\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right).$$

(Zde log je přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e.) Máme však

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x}\cdot\log\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^2+2}{x}}_{=:L_1(x)}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)}{5e^{\frac{x}{x+2}}-5}}_{=:L_2(x)}\cdot\underbrace{\frac{5\left(e^{\frac{x}{x+2}}-1\right)}{\frac{x}{x+2}}}_{=:L_3(x)}\cdot\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{=:L_4(x)}.$$

Platí: $\lim_{x\to 0}L_1(x)\cdot L_4(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x}\cdot\frac{x}{x+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x+2}=1$ (spojitost funkce $\frac{x^2+2}{x+2}$ v nule). Dále je $\lim_{x\to 0}L_2(x)=1$ (využijeme základní limitu pro logaritmus, $\lim_{y\to 1}\frac{\log(y)}{y-1}=1$, a faktu, že v limitě složené funkce v $L_2(x)$ je vnitřní funkce, tj. $(5e^{\frac{x}{x+2}}-4)$, prostá na okolí bodu 0). Konečně je $\lim_{x\to 0}L_3(x)=5$ (opět využijeme základní limitu pro exponenciálu, $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$, a faktu, že v limitě složené funkce v $L_3(x)$ je vnitřní funkce, tj. $\frac{x}{x+2}$, prostá na okolí bodu 0).

Celkově proto máme, podle věty o aritmetice limit,

$$B=1\cdot 1\cdot 5=5\,,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(5e^{\frac{x}{x+2}}-4\right)^{x+\frac{2}{x}}=e^{B}=e^{5}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozpis na exp a log .... 2 body
- výpočet $L_2(x)$ .... 6 bodů
- výpočet $L_3(x)$ .... 4 body
- výpočet B .... 2 body
- dopočtení .... 1 bod

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- dvakrát odůvodnění limity složené funkce .... 2×2 body
- aritmetika limit .... 1 bod
- spojitost exponenciály .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2},$$

kde symbolem log značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e. (15 bodů)

Řešení : Položíme $a_n := \left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$. Protože platí $\lim_{n\to\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = 1$, je určitě $a_n \geq 0$ pro všechna dostatečně velká přirozená[1] n, a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n = e^{n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)} =: e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n = n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \underbrace{n}_{P_n}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(1-\log\frac{n+1}{n}\right)}{-\log\frac{n+1}{n}}}_{Q_n}\cdot\underbrace{\frac{-\log\frac{n+1}{n}}{-\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}}_{R_n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{n+1}{n}\right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu $\lim_{n\to\infty} A_n$ využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\cdot S_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 1 \quad \text{(základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n = -\log\frac{n+1}{n}\text{)},$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 1 \qquad \text{(obdobné odůvodnění jako pro } Q_n\text{)}.$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} A_n = -1, \qquad \text{a proto} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Protože $1/e < 1$, plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$ .... 2 body
- výpočet Q_n .... 4 body
- výpočet R_n .... 3 body
- $\lim_{n\to\infty} A_n = -1$ .... 2 body
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$ .... 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce .... 2 body
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Dá se dokonce jednoduše spočíst, že $\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \geq 0$ a tedy i $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená n, není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené n_0, že $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{|1+x|}{\sqrt[3]{x}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, protože je součtem, podílem a složením spojitých funkcí, přičemž jmenovatel zlomku je na definičním oboru nenulový. Funkce není sudá, lichá, periodická. Dále platí $f(x) = 0$ právě když $x = -1$; $f(x) > 0$ pro $x > 0$, a $f(x) < 0$ pro $x < 0$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty\,,$$

  například podle věty o limitě typu „$\frac{A}{0}$“, a

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\,,$$

  například s využitím l'Hospitalova pravidla „$\frac{c}{\infty}$“ (váš výpočet by ovšem měl být o něco podrobnější).
- Asymptoty: není těžké spočíst, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt[3]{x}} = 0 =: a\,,$$

  proto

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

  proto asymptota v nekonečnu (a podobně i asymptota v mínus nekonečnu) neexistuje.
- Pro výpočet první derivace je dobré si například uvědomit, že $|1+x| = (1+x)\operatorname{sgn}(1+x)$, tedy

$$f'(x) = \left(\operatorname{sgn}(1+x)\,\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \operatorname{sgn}(1+x)\,\left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\,,$$

  protože $(\operatorname{sgn}(1+x))' = 0$ na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Kdo se však bojí derivovat absolutní hodnotu, může samozřejmě uvažovat f separátně pro $x < -1$ a $x > -1$. Tak či tak, dostaneme:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(1+x)\,\left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \operatorname{sgn}(1+x)\,\frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} = \mathcal{D}(f)\setminus\{-1\}\,.$$

  Odtud snadno plyne, že funkce f roste na $(-\infty,-1)$ a $(\frac{1}{2},+\infty)$, a klesá na $(-1,0)$ a na $(0,\frac{1}{2})$. V bodě -1 je lokální maximum hodnoty $f(-1) = 0$, v bodě $\frac{1}{2}$ je lokální minimum hodnoty $f(1/2) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.89$. Funkce nemá žádné globální extrémy.
- Jednostranné derivace v bodě -1 spočteme jako limitu derivací z příslušné strany, neboť f je spojitá v bodě -1:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1-} f'(x) = 1\,, \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to-1+} f'(x) = -1\,, \qquad \text{tj. } f'(-1) \text{ neexistuje.}$$

- Obor hodnot: funce f je spojitá na $(-\infty, 0)$, v obou krajních bodech tohoto intervalu má (z příslušné strany) limitu $-\infty$, a nabývá na tomto intervalu lokální (a vzhledem k tomuto intervalu i globální) maximum hodnoty 0. Podle věty o nabývání mezihodnot je tedy $f(-\infty, 0) = (-\infty, 0\rangle$. Podobnou úvahou dostaneme $f(0, \infty) = \langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty)$, celkově tedy:

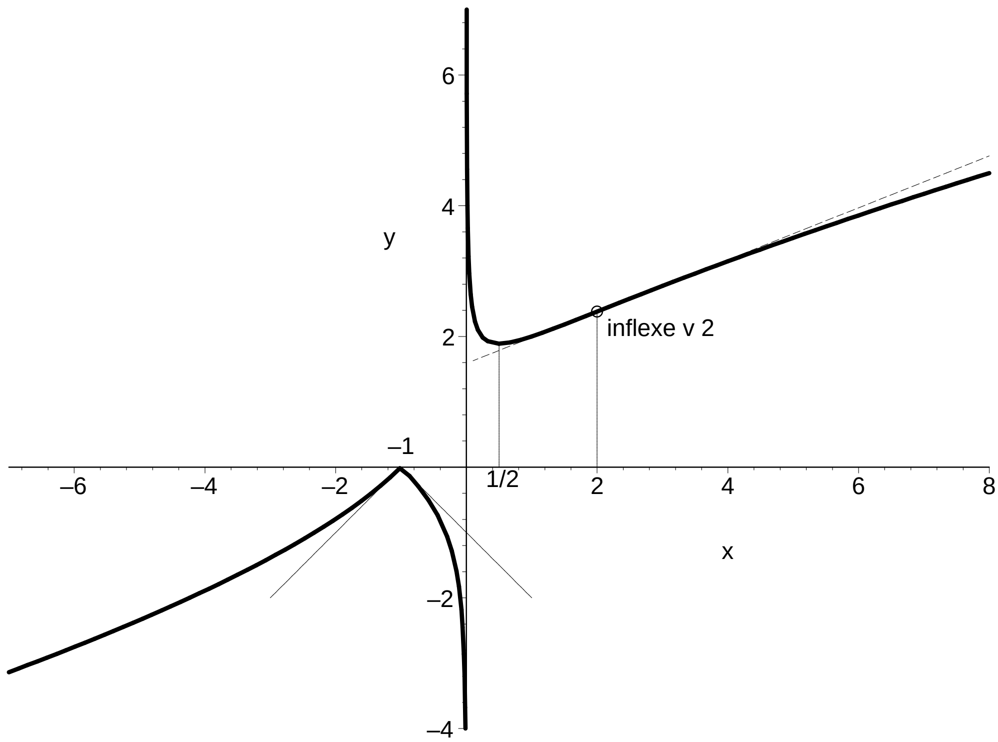
$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty \right) .$$

- Druhá derivace po nepříliš složitém výpočtu vyjde:

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(1+x) \left(\frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}} \right)' = \frac{2}{9} \operatorname{sgn}(1+x) \frac{2-x}{x^{\frac{7}{3}}} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} .$$

  Funkce tedy má inflexní bod $x = 2$, derivace v něm je $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \approx 0.397$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 2)$, a konkávní na $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 2 body
- limity v obou nekonečnech a jednostranné limity v nule .... 1 bod
- neexistence asymptot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranné derivace (limity derivací) .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 1 bod
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- inflexní bod .... 1 bod
- graf .... 2 body