Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a
ZS 2008-09, 9. 2. 2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{(n^4+n)^{50}-(n+1)^{200}}{(n+1)^{202}-n^{202}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Označíme $a_n := \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, $b_n := \frac{(n^4+n)^{50}-(n+1)^{200}}{(n+1)^{202}-n^{202}}$. Zlomek, tvořící a_n, rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, načež vytkneme nejvyšší mocninu n z každé ze závorek:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1\right)}{n+1-n} = n^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Odtud hned vidíme, že[1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 2\,. \qquad (1)$$

Použili jsme faktu, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$ a větu o aritmetice limit (tj. především toho, že v příslušných součtech a součinech nevzniká žádný nedefinovaný výraz), spojitost druhé odmocniny a Heineovu větu (rozmysletete si pečlivě!). Vztah (1) říká, chcete-li, že a_n se „pro velká n chová jako“ n^2.

V čitateli a jmenovateli b_n lze ve všech případech umocnění použít binomickou větu, ve jmenovateli je však také možné pro zpestření použít vzorce pro rozdíl 202-tých mocnin:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\left(n^{4\cdot 50}+50n^{4\cdot 49}n+\sum_{k=2}^{50}\binom{50}{k}n^{4\cdot(50-k)}n^k\right)-\left(n^{200}+200n^{199}+\sum_{k=2}^{200}\binom{200}{k}n^{200-k}\right)}{(n+1)^{201}+(n+1)^{200}n+\cdots+(n+1)n^{200}+n^{201}} \\ &= \frac{-200n^{199}+\sum_{j=0}^{198}\alpha_j n^j}{n^{201}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{201}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{200}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right)} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{-200+\sum_{j=0}^{198}\alpha_j n^{j-199}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{201}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{200}+\cdots+1}. \end{aligned}$$

Zde α_j jsou nějaká celá čísla (možná i některá rovná nule). V čitateli i jmenovateli opět vidíme členy, na jejichž chování lze aplikovat znalost, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$. Věta o aritmetice limit nám tedy dá

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = -\frac{200}{202}\,.$$

Celkem tedy máme, opět podle věty o aritmetice limit,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{(n^4+n)^{50}-(n+1)^{200}}{(n+1)^{202}-n^{202}} = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}\cdot n^2 b_n = 2\cdot\left(-\frac{200}{202}\right) = -\frac{200}{101}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 4 body
- úprava b_n .... 6 bodů
- dopočítání .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$ .... 1 bod
- spojitost odmocnin .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Pozor, někteří z vás použili v předchozích písemkách v této situaci zvláštní zápis $\lim_{n\to\infty} a_n = 2n^2$, což je nesmysl mimo jiné i proto, že hodnota limity nemůže záviset na n.

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2}.$$

(15 bodů)

Řešení : Limita je typu „$\frac{0}{0}$“, lze tedy použít l'Hospitalovo pravidlo (opět s konvencí, že „$\overset{\text{l'H}}{=}$“ znamená „rovná se, pokud existuje limita vpravo“):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\, 2^{x^2}\log 2 - 2x\, 3^{x^2}\log 3}{2(2^x - 3^x)(2^x\log 2 - 3^x\log 3)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{2^x - 3^x}}_{=:f(x)} \cdot \underbrace{\frac{2^{x^2}\log 2 - 3^{x^2}\log 3}{2^x\log 2 - 3^x\log 3}}_{=:g(x)}.$$

(Zde log je přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e.) Funkce g je spojitá v bodě $x = 0$, proto ihned dostaneme

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{2^0\log 2 - 3^0\log 3}{2^0\log 2 - 3^0\log 3} = 1.$$

Výraz, tvořící $f(x)$, je typu „$\frac{0}{0}$“, lze tedy opět (například) použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^x\log 2 - 3^x\log 3} = \frac{1}{\log 2 - \log 3}.$$

Celkově tedy máme podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2} = 1 \cdot \frac{1}{\log 2 - \log 3} = \frac{1}{\log 2 - \log 3}.$$

Poznámka: Nepříznivci l'Hospitalova pravidla mohou ocenit i jinou možnost jak dospět k výsledku. Úpravou, vykrácením x^2, a rozpisem obecné mocniny na exponenciálu a logaritmus dostaneme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^{x^2}-1}{x^2} - \frac{3^{x^2}-1}{x^2}}{\left(\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2\log 2}-1}{x^2\log 2}\log 2 - \frac{e^{x^2\log 3}-1}{x^2\log 3}\log 3}{\left(\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\log 2 - \frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\log 3\right)^2}.$$

Podle věty o limitě složené funkce (VOLSF) dostaneme dále (pro $c = 2$ nebo $c = 3$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log c} - 1}{x\log c} \overset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2\log c} - 1}{x^2\log c} \overset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

s využitím základní limity pro exponenciálu. V obou případech použití věty o limitě složené funkce nenabývají vnitřní funkce ($y = x\log c$, resp. $y = x^2\log c$) na prstencovém okolí bodu $x = 0$ limitní hodnoty $y = 0$, tedy výpočet je v pořádku. Celkově tedy máme podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2} = \frac{1\cdot\log 2 - 1\cdot\log 3}{(1\cdot\log 2 - 1\cdot\log 3)^2} = \frac{1}{\log 2 - \log 3}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- l'Hospital číslo 1 .... 5 bodů
- l'Hospital číslo 2 .... 5 bodů
- dopočet .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- ověření, že jde o l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“ .... 1 bod
- limita v bodě spojitosti .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^{4/3}}$. Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina n je ta pravá… Pokud se necháte poddat, tak vězte, že pro velká n se

$$\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{n},$$

zatímco (stále pro velká n) se

$$\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \tag{2}$$

Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}}_{=:A_n} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=:B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Protože $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, dostali jsme $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost B_n platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem“ v (2)):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Rovnost v $(\star)$ plyne ze základní limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ a Heineovy věty použité na posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$, která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 body
- číselný výpočet limity v (3) .... 6 bodů
- závěr, že řada konverguje .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- Heineho věta .... 1 bod
- limita složené funkce .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)}\,.$$

(15 bodů)

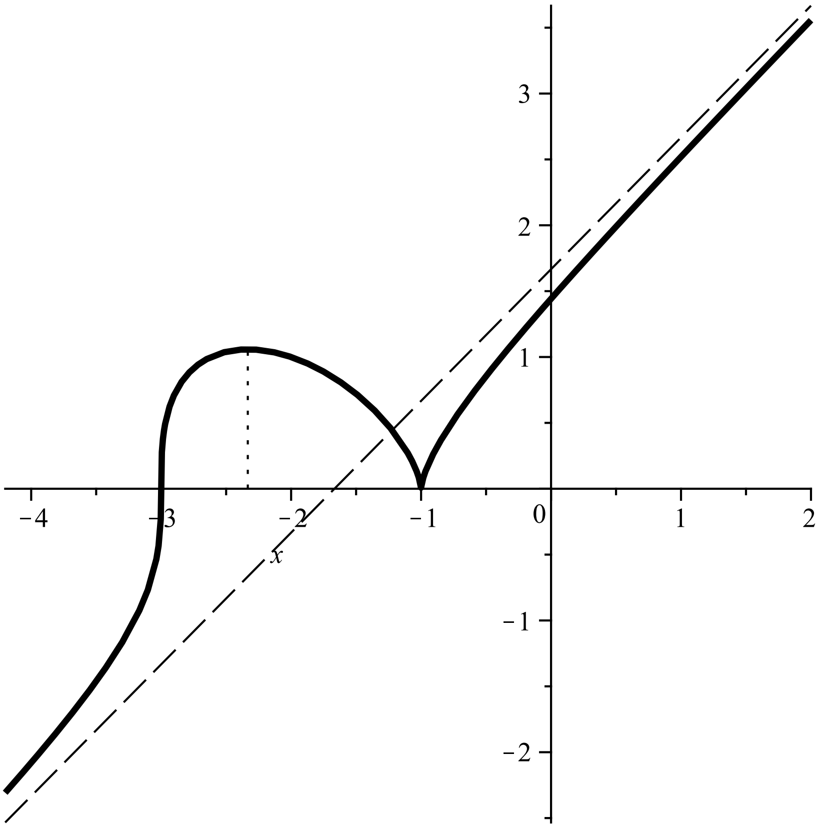
Řešení :

- Definiční obor: třetí odmocnina je definovaná pro všechna reálná čísla, tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (je součtem, součinem a složením spojitých funkcí), není sudá, lichá, periodická. Platí, že $f < 0$ právě když $x \in (-\infty, -3)$, $f > 0$ právě když $x \in (-3, -1) \cup (-1, \infty)$, $f(x) = 0$ právě když $x \in \{-3, -1\}$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \pm\infty\,.$$
Protože je f spojitá na $\mathbb{R}$, dává věta o nabývání mezihodnot, že obor hodnot f je celé $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. Limita výše zároveň říká, že $a := \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$. Protože limita výrazu $f(x) - x$ v $\pm\infty$ je
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+7x+3}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x+3)^2} + x\sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)} + x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} + 1} = \frac{5}{3}\,,$$
je přímka $y = x + \frac{5}{3}$ asymptotou jak v $+\infty$ tak v $-\infty$.
- První derivace: pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$ je[2]
$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x+3) + (x+1)^2}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x+7}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}}.$$
- Protože funkce f je spojitá (mimo jiné i) v bodech -3 a -1, a protože níže uvedené limity existují, platí:
$$f'_{\pm}(-3) = \lim_{x\to-3\pm} f'(x) = +\infty, \qquad f'_{\pm}(-1) = \lim_{x\to-1\pm} f'(x) = \pm\infty,$$
tedy existuje $f'(-3) = +\infty$, a neexistuje $f'(-1)$.
- Funkce f tedy roste na $(-\infty, -\frac{7}{3})$ a $(-1, \infty)$, a klesá na $(-\frac{7}{3}, -1)$. V bodě $-\frac{7}{3}$ je lokální maximum hodnoty $f(-\frac{7}{3}) = \sqrt[3]{32}/3 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1.0582$, $f'(-\frac{7}{3}) = 0$, a v bodě -1 je lokální minimum hodnoty 0.
- Druhá derivace: pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$ dostaneme
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{9(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}} - (3x+7)\left[(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}} + 2(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}}\right]}{9(x+1)^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{9(x+1)(x+3) - (3x+7)(3x+5)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{5}{3}}} = \underbrace{\frac{-8}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}}}_{<0} \cdot \frac{1}{x+3}. \end{aligned}$$
Funkce je tedy konvexní na intervalu $(-\infty, -3)$, a konkávní na intervalech $(-3, -1)$ a $(-1, +\infty)$. Funkce nemá inflexní bod.

---

[2] Zde a také dále používáme pro zjednodušení zápisu symbol $a^{\frac{1}{3}}$ místo $\sqrt[3]{a}$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- obor hodnot .... 1 bod
- limity v obou nekonečnech .... 1 bod
- asymptota .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- graf .... 2 body