# Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a
# ZS 2008-09, 2. 2. 2009

**Příklad 1 :** Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{\sqrt{n}(n+1)}}{\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}}.$$

(15 bodů)

---

**Řešení :** Díky tvaru jmenovatele budeme zlomek

$$Z_n := \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{\sqrt{n}(n+1)}}{\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}}$$

rozšiřovat výrazem $\sqrt{4n+3} + \sqrt{4n+2}$. Přepíšeme čitatele:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{\sqrt{n}(n+1)} = \underbrace{\sqrt[6]{(n+1)^3}}_{=:A} - \underbrace{\sqrt[6]{n(n+1)^2}}_{=:B},$$

odkud vidíme, že dále je třeba rozšířit zlomek $Z_n$ výrazem

$$\begin{aligned}
&A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + A^5 = \\
&= \sqrt[6]{(n+1)^{15}} + \sqrt[6]{(n+1)^{12}n(n+1)^2} + \sqrt[6]{(n+1)^9n^2(n+1)^4} + \\
&\qquad + \sqrt[6]{(n+1)^6n^3(n+1)^6} + \sqrt[6]{(n+1)^3n^4(n+1)^8} + \sqrt[6]{n^5(n+1)^{10}} = \\
&= \sqrt[6]{(n+1)^{15}} + \sqrt[6]{(n+1)^{14}n} + \sqrt[6]{(n+1)^{13}n^2} + \sqrt[6]{(n+1)^{12}n^3} + \sqrt[6]{(n+1)^{11}n^4} + \sqrt[6]{(n+1)^{10}n^5}.
\end{aligned}$$

Po rozšíření tímto výrazem dostaneme v čitateli

$$(n+1)^3 - n(n+1)^2 = (n+1)^2\Big(n+1-n\Big) = (n+1)^2,$$

a tedy

$$Z_n = \frac{(n+1)^2\left(\sqrt{4n+3} + \sqrt{4n+2}\right)}{\sqrt[6]{(n+1)^{15}} + \sqrt[6]{(n+1)^{14}n} + \sqrt[6]{(n+1)^{13}n^2} + \sqrt[6]{(n+1)^{12}n^3} + \sqrt[6]{(n+1)^{11}n^4} + \sqrt[6]{(n+1)^{10}n^5}} =$$

(po vykrácení zlomku výrazem $n^{15/6} = n^{5/2}$)

$$= \frac{(1+\frac{1}{n})^2\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}} + \sqrt{4+\frac{2}{n}}\right)}{\sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{15}} + \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{14}} + \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{13}} + \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{12}} + \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{11}} + \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}}.$$

S využitím faktu, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti $k$-té odmocniny tedy dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{\sqrt{n}(n+1)}}{\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}} = \lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1\cdot(\sqrt{4}+\sqrt{4})}{6\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava jmenovatele ........ 2 body
- úprava čitatele ........ 7 bodů
- dopočítání ........ 6 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ........ 1 bod
- spojitost odmocnin ........ 1 bod
- aritmetika limit ........ 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

**Příklad 2 :** Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\arcsin x} - 1}{x},$$

kde $\log x$ $(= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu $e$). (15 bodů)

---

**Řešení :** Nejprve provedeme výpočet, který poté okomentujeme (čtenář tak dostává šanci přijít sám na to, co se při výpočtu děje):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\arcsin x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \arcsin x}{x \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x) - \arcsin x}{x^2}}_{=:g_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{x}{\arcsin x}}_{=:g_2(x)} \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2x}}_{=:h(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}}_{=:h_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1-x^2} - (1+x)}{2x}}_{=:h_2(x)} \overset{\text{l'H}}{=} 1 \cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{2}}_{=:r(x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

**Komentář:** po rozšíření zlomku funkcí $\arcsin x$ jsme si uvědomili, že jde o výraz typu „$\frac{0}{0}$“, který budeme řešit pomocí l'Hospitalova pravidla. Aby derivace ve jmenovateli byla co nejjednodušší, provedli jsme úpravu na součin funkcí $g_1$ a $g_2$. Pro funkci $g_2$ máme, neboť jde o limitu typu „$\frac{0}{0}$“,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1\,,$$

kde $\overset{\text{l'H}}{=}$ znamená, zde i jinde v této úloze, „pokud existuje limita vpravo“. Limita $\lim_{x\to 0} g_1(x)$ je typu „$\frac{0}{0}$“, proto opět použijeme l'Hospitalovo pravidlo, takže místo limity $\lim_{x\to 0} g_1(x)g_2(x)$ dostaneme[1] $\lim_{x\to 0} h(x)$. Tato limita je opět typu „$\frac{0}{0}$“ a, poučeni předchozí situací, opět ji nejprve upravíme, aby se lépe derivovalo, na součin $h_1(x)h_2(x)$. Funkce $h_1(x)$ je spojitá v bodě 0, proto ihned $\lim_{x\to 0} h_1(x) = h_1(0) = 1$. Na limitu součinu $\lim_{x\to 0} h_1(x)h_2(x)$ platí tedy stejná úvaha jako v (1), v poznámce pod čarou. Limita $\lim_{x\to 0} h_2(x)$ je opět typu „$\frac{0}{0}$“, použijeme naposledy l'Hospitalovo pravidlo (stejně tak ovšem můžeme $h_2(x)$ rozšířit výrazem $\sqrt{1-x^2}+1+x$). Výsledná funkce, $r(x)$, je pak již spojitá v bodě 0, máme tedy výsledek dosazením $x = 0$ do $r(x)$.

---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- l'Hospital číslo 1 .......... 5 bodů
- l'Hospital číslo 2 .......... 5 bodů
- dopočet .......... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- ověření, že jde o l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“ .......... 1 bod
- limita v bodě spojitosti .......... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

---

[1] Je důležité si uvědomit, že díky $\lim_{x\to 0} g_2(x) = 1$ skutečně platí

$$\lim_{x\to 0} g_1(x)g_2(x) = \lim_{x\to 0} g_1(x) \cdot \lim_{x\to 0} g_2(x) = \lim_{x\to 0} g_1(x) \cdot 1\,. \tag{1}$$

Pokud totiž limita $\lim_{x\to 0} g_1(x)$ existuje, ať je jakákoli (z $\mathbf{R}^*$), bude mít součin $\lim_{x\to 0} g_1(x) \cdot \lim_{x\to 0} g_2(x)$ smysl. Nejde tedy o „částečné limitění“. Právě provedená úvaha je pravým obsahem sloganu „podle věty o aritmetice limit“, který velká část studentů považuje za jakousi povinnou nepříjemnost bez většího významu. Její důležitost však spočívá právě v tom, že si uvědomíte, co se děje. Kdyby například byla $\lim_{x\to 0} g_2(x) = 0$, nebylo by možno „roztržení limit“ jako v (1) provést, protože kdyby $\lim_{x\to 0} g_1(x)$ byla náhodou nekonečná, dostali byste neurčitý výraz „$\infty \cdot 0$“. Psát v této situaci mechanicky „podle věty o aritmetice limit“ by pak nedokazovalo nic jiného než skutečnost, že ne zcela rozumíte tomu, proč se tam taková věc píše. :-)

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n ,$$

kde $\log x \,(= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu $e$). (15 bodů)

---

**Řešení :** Položme

$$a_n := \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n .$$

Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n} \underbrace{\log \frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n} .$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \log 1 = 0 ,$$

kde jsme využili faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé $n$ přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1 ,$$

odkud plyne, že posloupnost $b_n$ je omezená[2]. Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 ,$$

což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

**Poznámka:** Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená $n$ platí

$$0 < \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n < \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n ,$$

nebo že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n}{\left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n} = 1 .$$

Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

---

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria ........ 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit ........ 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu ........ 4 bodů
- výpočet limity $n$-té odmocniny ........ 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) .... 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[2] Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponencielu a logaritmus, a obdržíme také $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{1}{2}\arccos(1 - \log^2 x),$$

kde $\log x$ $(= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu $e$). (15 bodů)

---

**Řešení :**

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \le 1 - \log^2 x \le 1$, tedy $0 \le \log^2 x \le 2$, neboli $-\sqrt{2} \le \log x \le \sqrt{2}$. Celkově tedy máme $\mathcal{D}(f) = \langle e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\rangle$.

- $f$ je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, neboť je součinem, rozdílem a složením spojitých funkcí. Definiční obor ukazuje, že funkce nemá symetrie (není sudá, lichá, periodická). Dále je $f \ge 0$ na $\mathcal{D}(f)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru jsou díky spojitosti funkce v těchto bodech rovny přímo funkčním hodnotám:
$$f(e^{-\sqrt{2}}) = f(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\arccos(1-2) = \frac{\pi}{2}\,.$$

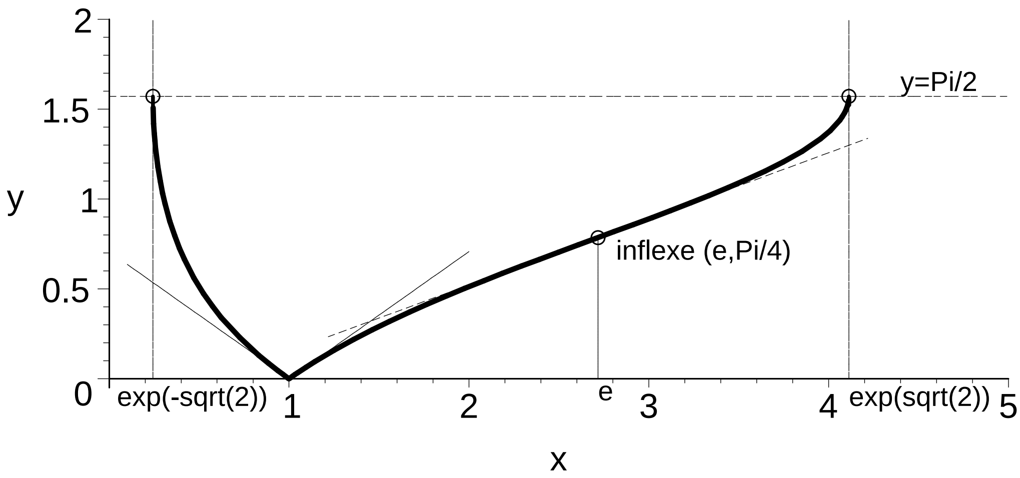
- První derivace (výrazy ve jmenovateli určují, pro která $x$ tento výpočet neplatí):
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-(1-\log^2 x)^2}}\cdot\frac{(-2\log x)}{x} = \frac{\log x}{x\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} = \\ &= \frac{\log x}{x|\log x|\sqrt{2-\log^2 x}} = \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{x\sqrt{2-\log^2 x}}\,, \qquad x \in \mathcal{D}(f)\setminus\{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}\,. \end{aligned}$$
Funkce $f$ je spojitá v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ (zprava), 1 (oboustranně), $e^{\sqrt{2}}$ (zleva), proto lze jednostranné derivace v těchto bodech získat takto (pokud tedy příslušné limity derivací existují, což, jak ukáže výpočet, platí):
$$f'_+(e^{-\sqrt{2}}) = \lim_{x\to e^{-\sqrt{2}}+} f'(x) = -\infty\,, \qquad f'_-(e^{\sqrt{2}}) = \lim_{x\to e^{\sqrt{2}}-} f'(x) = +\infty\,,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$
Z hodnot posledních dvou limit plyne, že derivace $f'(1)$ neexistuje.

- Funkce $f$ klesá na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1\rangle$ a roste na $\langle 1, e^{-\sqrt{2}}\rangle$. V bodě 1 je lokální (i globální) minimum hodnoty 0, v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ a $e^{\sqrt{2}}$ jsou globální maxima hodnoty $\frac{\pi}{2}$.

- Obor hodnot je tedy $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, asymptoty v nekonečnech nemá smysl uvažovat.

- Druhá derivace:
$$f''(x) = \operatorname{sgn}(\log x)\cdot\frac{-\left(\sqrt{2-\log^2 x} - \frac{\log x}{\sqrt{2-\log^2 x}}\right)}{x^2(2-\log^2 x)} = \operatorname{sgn}(\log x)\frac{\log^2 x + \log x - 2}{x^2\sqrt{(2-\log^2 x)^3}}\,,$$
$$x \in \mathcal{D}(f)\setminus\{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}\,.$$
Řešením kvadratické rovnice $\log^2 x + \log x - 2 = 0$ dostaneme $\log x = -2$, $\log x = 1$. První kořen leží mimo definiční obor, tedy $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Výraz ve jmenovateli nemění znaménko, tedy dostaneme, že $f$ je konvexní na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1\rangle$ a na $\langle e, e^{\sqrt{2}}\rangle$, je konkávní na $\langle 1, e\rangle$. V bodě $[e, \frac{\pi}{4}]$ je inflexní bod, hodnota derivace v tomto bodě je $f'(e) = \frac{1}{e}$.

- Graf:




---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .................... 1 bod
- spojitost .................... 1 bod
- obor hodnot .................... 1 bod
- výpočet první derivace .................... 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$ .................... 2 body
- monotonie, lokální extrémy .................... 2 body
- výpočet druhé derivace .................... 2 body
- konvexita, konkávita .................... 1 bod
- inflexní bod .................... 1 bod
- graf .................... 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$, pro které neplatí obecný vzorec pro $f'$ resp. $f''$
- odmocňování podle schématu „$\sqrt{A^2} = A$“, přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací

---