# Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a
# ZS 2008-09, 26. 1. 2009

**Příklad 1 :** Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{100}-(n+1)^{200}}{(n^8+2)^{25}-(n^4+1)^{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^{12}+2n^{11}+1}-\sqrt[3]{n^{12}+n^{11}+1}}\,.$$

(15 bodů)

---

**Řešení :**

Označme $a_n := \frac{(n^2+1)^{100}-(n+1)^{200}}{(n^8+2)^{25}-(n^4+1)^{50}}$, $\quad b_n := \frac{1}{\sqrt[3]{n^{12}+2n^{11}+1}-\sqrt[3]{n^{12}+n^{11}+1}}$, zajímá nás tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. Úpravou $b_n$ dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sqrt[3]{(n^{12}+2n^{11}+1)^2}+\sqrt[3]{(n^{12}+2n^{11}+1)\,(n^{12}+n^{11}+1)}+\sqrt[3]{(n^{12}+n^{11}+1)^2}}{n^{11}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^{12}}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^{12}}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{12}}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{12}}\right)^2}}{n^3}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Z faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$, ze spojitosti třetí odmocniny a z artimetiky limit plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} n^3 b_n = 3\,, \tag{2}$$

což je jedna z korektních možností, jak vyjádřit slogan, že „$b_n$ se pro velká $n$ chová jako $\frac{1}{n^3}$“.

V rozvoji $a_n$ není nutno počítat všechny členy (ani by to nebylo záhodno), bude stačit, když si ujasníme nejvyšší mocninu $n$ v čitateli i jmenovateli. Proto pišme (podle binomické věty):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(n^{200}+100n^{198}+\sum_{k=0}^{98}\binom{100}{k}n^{2k}\right)-\left(n^{200}+200n^{199}+\sum_{k=0}^{198}\binom{200}{k}n^{k}\right)}{\left(n^{200}+25\cdot 2n^{192}+\sum_{k=0}^{23}\binom{25}{k}n^{8k}2^{25-k}\right)-\left(n^{200}+50n^{196}+\sum_{k=0}^{48}\binom{50}{k}n^{4k}\right)} = \\ &= \frac{-200n^{199}+\sum_{m=0}^{198}\alpha_m n^m}{-50n^{196}+\sum_{m=0}^{195}\beta_m n^m} = n^3\left(\frac{-200+\sum_{m=0}^{198}\alpha_m n^{m-199}}{-50+\sum_{m=0}^{195}\beta_m n^{m-196}}\right)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $\alpha_m, \beta_m$ jsou celá čísla. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = \frac{-200}{-50} = 4\,, \tag{4}$$

s využitím aritmetiky limit a faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = 0$ pro $a < 0$. Celkově tedy podle (2), (4) máme:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3}\cdot n^3 b_n = 4\cdot 3 = 12\,.$$

---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava třetích odmocnin ........ 4 body
- úprava rozdílu a podílu polynomů ........ 6 bodů
- dopočítání ........ 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$ (u $a_n$ i u $b_n$) ........ $2\times 1$ bod
- spojitost třetích odmocnin ........ 1 bod
- aritmetika limit ........ 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

**Příklad 2 :** Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x}.$$

(15 bodů)

---

**Řešení :** Protože $\lim_{x\to 0}\frac{2}{\pi}\arccos x = 1$, je na nějakém prstencovém okolí nuly funkce $\frac{2}{\pi}\arccos x$ kladná, a proto je obecná mocnina za znamením limity definována korektně,[1] tedy:

$$A := \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{cotg} x \log\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)} = e^B\,, \tag{5}$$

jak plyne ze spojitosti funkce exp, pokud ovšem existuje vlastní

$$B := \lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} x \log\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right).$$

Máme však

$$B = \lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} x \log\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right) = \lim_{x\to 0}\underbrace{\cos x}_{=:L_1(x)}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1}}_{=:L_2(x)}\cdot\underbrace{\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1}{\sin x}}_{=:L_3(x)}.$$

Platí: $\lim_{x\to 0} L_1(x) = 1$ (spojitost kosinu v nule), a dále $\lim_{x\to 0} L_2(x) = 1$ (využijeme základní limitu pro logaritmus, $\lim_{y\to 1}\frac{\log(y)}{y-1} = 1$, a faktu, že v limitě složené funkce v $L_2(x)$ je vnitřní funkce, tj. $\frac{2}{\pi}\arccos x$, prostá na okolí bodu 0). Limitu výrazu $L_3(x)$ spočteme například použitím l'Hospitalova pravidla typu „$\frac{0}{0}$“:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1}{\sin x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = -\frac{2}{\pi},$$

kde „$\overset{\text{l'H}}{=}$“ značí „pokud existuje limita vpravo“. Celkově, podle věty o aritmetice limit, $B = -\frac{2}{\pi}$, a tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití rozpisu na exp a log .................................................. 2 body
- výpočet pomocí základní limity logaritmu, včetně odůvodnění (složená fce) .. 5 bodů
- výpočet pomocí l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“, včetně ověření, že jde o tento typ ...... 5 bodů
- dokončení, včetně argumentu o spojitosti exp ............................... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- základní limita logaritmu, limita složené funkce ............................ 1 + 1 bod
- ověření, že jde o l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“ ....................................... 1 bod
- spojitost exp ........................................................... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Také odtud vidíme, že limita, kterou máme spočítat je typu „$1^{\pm\infty}$“

**Příklad 3 :** Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right).$$
(15 bodů)

---

**Řešení :** Položme
$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}\,, \qquad y_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{6}$$
Není těžké odhadnout, že $x_n$ „se chová pro velká $n$ jako“ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, a také, že $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$ „se chová pro velká $n$ jako“ $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$.

Přesněji, pro $x_n$ máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 1\,, \tag{7}$$
zatímco pro $y_n$ máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$
Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{2}{3}$), dále pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje (s využitím znalosti, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ konveguje právě tehdy, když $\gamma > 1$), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} \quad \text{konverguje, zatímco} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \quad \text{diverguje.}$$

**První možnost zakončení:** Z výše uvedeného již plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right) \quad \text{diverguje,}$$
neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenvních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)-\left(\frac{1+2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$, což není pravda.

**Druhá možnost zakončení:** Pro všechna přirozená $n$ platí $\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

---

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .......... 5 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .......... 6 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ .......... 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje a proč .......... 1+1 bod
- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje a proč .......... 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}} = 0$ pro $\beta > 0$ .......... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové .......... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy .......... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right),$$

kde $\log x$ ($= \ln x$) je přirozený logaritmus (logaritmus o základu $e$). (15 bodů)

---

**Řešení :**

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \le \frac{2\log x}{\log^2 x+1} \le 1$. Odtud tedy $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$.
- $f$ je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, z tvaru definičního oboru plyne, že nemá smysl uvažovat symetrie (sudost, lichost, periodicitu), $f \ge 0$ na $\mathcal{D}(f)$, a dále je (např.) $f(1) = \pi/2$.
- Obor hodnot: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f(x) = \pi \Leftrightarrow x = 1/e$, funkce $f$ je (mimo jiné) spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 1/e, e\rangle$, nabývá tedy i všech mezihodnot mezi 0 a $\pi$. Protože funkce arccos jiných hodnot nabýt nemůže, je obor hodnot $[0, \pi]$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru: protože $\frac{2\log x}{1+\log^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\log x}+\log x}$ konverguje k nule jak pro $x \to 0+$, tak pro $x \to +\infty$, a protože $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, a navíc funkce arccos je spojitá v nule, plyne z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{odkud rovněž plyne} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

  Poslední dvě limity tedy zároveň říkají, že přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou v $+\infty$.

- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{e}, e\}$ je

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\log^2 x}{(\log^2 x+1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x+1) - 2\log x \cdot \frac{2}{x}\log x}{(\log^2 x+1)^2} = \\ &= -\frac{\sqrt{(\log^2 x+1)^2}}{\sqrt{(\log^2 x-1)^2}} \cdot \frac{2-2\log^2 x}{x(\log^2 x+1)^2} = \frac{2\,(\log^2 x - 1)}{x\,(\log^2 x+1)|\log^2 x - 1|} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)}{x\,(\log^2 x+1)}\,. \end{aligned}$$

  Dále,

$$f'_+(e) = \lim_{x\to e+} f'(x) = \frac{1}{e}\,, \qquad f'_-(e) = \lim_{x\to e-} f'(x) = -\frac{1}{e}\,,$$
$$f'_+\left(\frac{1}{e}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{e}+} f'(x) = -e\,, \qquad f'_-\left(\frac{1}{e}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{e}-} f'(x) = e\,,$$

  protože $f$ je spojitá v bodě $e$ i v bodě $1/e$ a protože příslušné limity derivací existují.

  Funce $f$ klesá na $(1/e, e)$, roste na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. V bodě $1/e$ je lokální maximum hodnoty $\pi$, v bodě $e$ je lokální minimum hodnoty 0. S ohledem na obor hodnot jde v obou případech také o globální extrémy. Hodí se též spočítat si $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$, i když derivace $f'_+(0)$ není definována ($f$ není definována v 0).

- Druhá derivace:[2]

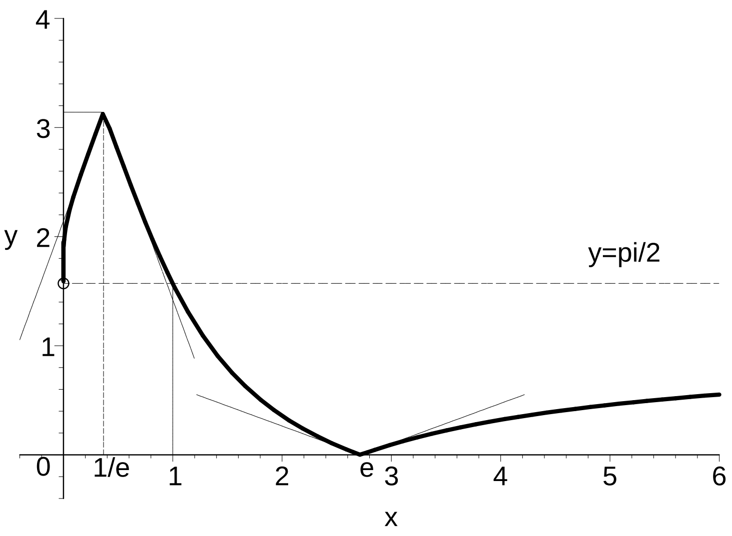
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x - 1)\left(\frac{1}{x\,(\log^2 x+1)}\right)' = -2\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x-1)\frac{\log^2 x + 1 + 2\log x}{x^2\,(\log^2 x+1)^2} = \\ &= \underbrace{-\frac{2\,(\log x+1)^2}{x^2(\log^2 x+1)^2}}_{<0}\,\mathrm{sgn}\,(\log^2 x - 1)\,, \qquad x \ne \frac{1}{e}, e\,. \end{aligned}$$

  $f$ je tedy konvexní na $(1/e, e)$ a konkávní na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. Funkce nemá inflexní body.

---

[2]Nebojte se derivovat sgn, mimo body $e$ a $1/e$ je to konstanta, tudíž ji lze vytknout z derivovaného výrazu.

- Graf:




---

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor . . . . . . . . . . 1 bod
- spojitost . . . . . . . . . . 1 bod
- limity v krajích definičního oboru . . . . . . . . . . 1 body
- asymptota . . . . . . . . . . 1 bod
- obor hodnot . . . . . . . . . . 1 bod
- výpočet první derivace . . . . . . . . . . 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v $e$ a $1/e$ . . . . . . . . . . 1 bod
- monotonie, lokální extrémy . . . . . . . . . . 2 body
- výpočet druhé derivace . . . . . . . . . . 2 body
- konvexita, konkávita . . . . . . . . . . 1 bod
- graf . . . . . . . . . . 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů $e$ a $1/e$, pro které neplatí obecný vzorec pro $f'$ resp. $f''$
- odmocňování podle schématu „$\sqrt{A^2} = A$“, přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrdit, že existuje jednostranná derivace v bodě, ve kterém není funkce definovaná

---