Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a ZS 2008-09, 19. 1. 2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{17}}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{18}}} \right) \Big((n^5+n)^4 - (n^4+2n)^5 \Big).$$

(15 bodů)

Řešení :

Označme $a_n := \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{17}}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{18}}}$, $b_n := (n^5+n)^4 - (n^4+2n)^5$, zajímá nás tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. Máme

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^{17}} - \frac{1}{n^{18}}}{\underbrace{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^{17}}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^{17}}\right)\left(1+\frac{1}{n^{18}}\right)} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^{18}}\right)^2}}_{=:\,c_n}} = \frac{1}{c_n}\cdot\frac{n-1}{n^{18}}\,. \tag{1}$$

Z faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$, ze spojitosti třetí odmocniny a z artimetiky limit plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3\,. \tag{2}$$

Z (1)–(2) vyplývá, že není nutno počítat všechny[1] členy b_n, neboť ty, které obsahují menší než sedmnáctou mocninu n, půjdou po vynásobení a_n k nule, když $n \to +\infty$. Proto pišme:

$$b_n = \left(n^5+n\right)^4 - \left(n^4+2n\right)^5 = \left(n^{20}+4n^{16}+\dots\right) - \left(n^{20}+10n^{17}+\dots\right) = -10n^{17} + \sum_{k=0}^{16} \alpha_k n^k\,, \tag{3}$$

kde konkrétní hodnoty celých čísel α_k nejsou pro výsledek limity podstatné.

Celkově tedy máme:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n}\cdot\frac{(n-1)\left(-10n^{17}+\sum\limits_{k=0}^{16}\alpha_k n^k\right)}{n^{18}} = -\frac{10}{3}\,,$$

s využitím (2), aritmetiky limit a opět faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava třetích odmocnin .... 5 bodů
- úprava rozdílu polynomů .... 5 bodů
- dopočítání .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ pro $a > 0$ .... 1 bod
- spojitost třetích odmocnin .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

---

[1] Pro pořádek, zde je (podle binomické věty):

$$\left(n^5+n\right)^4 - \left(n^4+2n\right)^5 \quad = \quad \left(n^{20}+4n^{16}+6n^{12}+4n^8+n^4\right) - \left(n^{20}+10n^{17}+40n^{14}+80n^{11}+80n^8+32n^5\right)\,.$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}\cos x - 1 - \sin\frac{x}{2}}{x^2}. \tag{4}$$

(15 bodů)

Řešení :

Hrubou chybou by bylo provést v čitateli „částečnou limitu“ (s využitím $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$) a počítat místo zadané limity limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 - \sin\frac{x}{2}}{x^2}$ (která, mimochodem, neexistuje).

Výpočet (4) provedeme rozšířením zlomku výrazem „x“ a trojnásobným použitím l'Hospitalova pravidla typu „$\frac{0}{0}$“. Při označení

$$f(x) := (e^x - 1)\cos x - x - x\sin\frac{x}{2}, \qquad g(x) := x^3,$$

máme ihned

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} g''(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g'''(x) = 6.$$

Pro funkci f dále máme:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x\cos x - e^x\sin x + \sin x - 1 - \sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, && \lim_{x\to 0} f'(x) = 0,\\
f''(x) &= -2\,e^x\sin x + \cos x - \cos\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}, && \lim_{x\to 0} f''(x) = 0,\\
f'''(x) &= -2\,e^x\sin x - 2\,e^x\cos x - \sin x + \frac{3}{4}\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{8}\cos\frac{x}{2}, && \lim_{x\to 0} f'''(x) = -2,
\end{aligned}$$

tedy (v každém kroku je potřeba ověřit, že l'Hospitalovo pravidlo „$\frac{0}{0}$“ lze znovu použít, to však plyne z hodnot limit výše):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \tag{5}$$

kde „$\overset{\text{l'H}}{=}$“ značí „pokud existuje limita vpravo“.

Poznámka: místo třetího použití l'Hospitala lze limitu $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ spočítat přímo, neboť:

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-2\,e^x\sin x + \cos x - \cos\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}}{6x} = -\frac{2e^x}{6}\cdot\frac{\sin x}{x} - 2\frac{\sin\frac{3x}{4}\sin\frac{x}{4}}{6x} + \frac{1}{24}\sin\frac{x}{2}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- 1. krok výpočtu .... 4 bod
- 2. krok výpočtu .... 4 bod
- dokončení, včetně odůvodnění a výsledku .... 7 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- každé ověření, že jde o l'Hospitala typu „$\frac{0}{0}$“ .... po 1 bodu
- uvedení faktu (v nějaké formě), že u l'Hospitala musí existovat limita vpravo . 2 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}},$$

kde $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo „n nad k“. (15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}.$$

Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ dostaneme

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots - 2)$, $(\cdots - 3)$ ve výrazech výše,

$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$

Označme tedy $b_n := \frac{1}{n^2}$. Lze ihned konstatovat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \tag{7}$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6) podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 4 body
- určení b_n a spočtení (7) .... 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová .... 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}\,,$$

kde „třetí odmocninou“, tj. funkcí $\sqrt[3]{z}$, rozumíme funkci inverzní k funkci $z^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: lichá odmocnina z reálného čísla je definovaná pro všechna reálná čísla, proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$.
- *Význačné hodnoty funkce (nebylo nutno zkoumat, pouze pomáhají): $f(x) = 0 \iff x = 0$ nebo $x = 3$, $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $f(x) < 0$ pro $x \in (3, +\infty)$.*
- Limity v krajních bodech definičního oboru: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = \mp\infty\,.$
- Odtud a ze spojitosti f na $\mathbb{R}$ plyne, že obor hodnot $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.
- Dále lze ihned spočíst asymptoty v $\pm\infty$:

$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$

  a

$$\begin{aligned} b &:= \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - ax\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x\Big) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} + 1} = 1\,, \end{aligned}$$

  existuje tedy asymptota, tatáž v obou nekonečnech, a sice $y = -x + 1$.
- První derivace (zde i dále užíváme pro větší přehlednost zápisu konvence $\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$, myslíme tím ovšem stále třetí odmocninu jako inverzní funkci ke třetí mocnině, tedy odmocninu definovanou pro všechna reálná čísla):

$$f'(x) = \big((3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}\big)' = \frac{6x - 3x^2}{3(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}}\,, \qquad x \neq 0, 3\,,$$

  funkce f tedy roste na $(0, 2)$ a klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(2, +\infty)$. V bodě 0 je lokální minimum hodnoty $f(0) = 0$, v bodě 2 je lokální maximum $f(2) = \sqrt[3]{32} \approx 1.587$, $f'(x) = 0 \iff x = 2$. Dále, protože f je spojitá (z obou stran) v bodě 0 i v bodě 3:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty\,, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty\,, \quad \text{tj. } f'(0) \text{ neexistuje,}$$

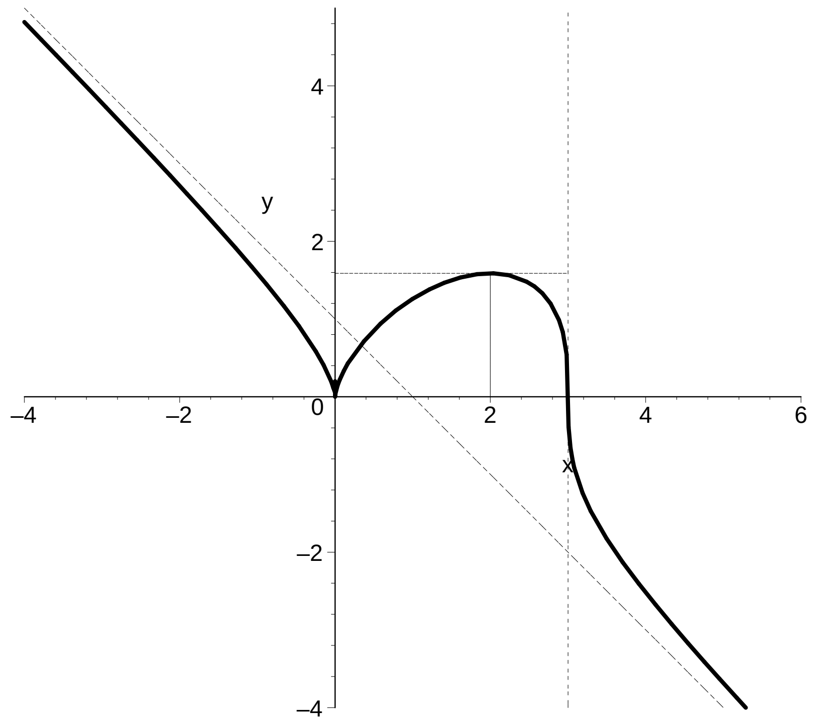
$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 3-} f'(x) = f'_-(3)\,, \quad \text{tj. existuje } f'(3) = -\infty.$$

  Derivaci v bodě 3 lze spočíst i z definice, $f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}}{x - 3} = -\infty$ například pomocí l'Hospitalova pravidla, což vede opět na výpočet $\lim_{x\to 3} f'(x)$.
- Druhá derivace po úpravě vychází:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}}\right)' = \frac{-x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - (2 - x)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{-x(3 - x) - (2 - x)\left(\frac{1}{3}(3 - x) - \frac{2}{3}x\right)}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} \qquad x \neq 0, 3\,. \end{aligned}$$

  Funkce je tedy konvexní na intervalu $(3, +\infty)$, a konkávní na $(-\infty, 0)$ a na $(0, 3)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost .... 1 bod
- limity v krajích definičního oboru, asymptoty .... 2 body
- obor hodnot .... 1 bod
- výpočet první derivace .... 1 bod
- jednostranné derivace (limity derivací) a derivace v bodě 3 .... 2 body
- monotonie, lokální extrémy .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita .... 1 bod
- graf .... 2 body

Nejčastější chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- nespecifikování bodů, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrzení, že f klesá na $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- tvrzení, že f je konkávní na $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
