Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a (VZOR)
ZS 2008-09, 9. 1. 2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2[\sqrt{n}])^n + 1}}{\sqrt{n}},$$

kde $[\sqrt{n}]$ značí celou část čísla $\sqrt{n}$. (15 bodů)

Řešení :

Označme $a_n := \frac{\sqrt[n]{(2[\sqrt{n}])^n+1}}{\sqrt{n}}$. S využitím odhadů, které platí pro celou část reálného čísla, tj.

$$\sqrt{n} - 1 \le [\sqrt{n}] \le \sqrt{n},$$

dostaneme

$$\frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n}-2)^n + 1}}{\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n})^n + 1}}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Výrazy vlevo a vpravo v (1) lze dále odhadnout výrazy, jejichž limity půjde snadno spočítat (všimněte si: „zbavíme se“ oněch nepohodlných jedniček v čitateli).

Máme

$$b_n := \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n}-2)^n}}{\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n}-2)^n + 1}}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Pak ovšem

$$b_n = \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n}-2)^n}}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}},$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 2$, podle věty o aritmetice limit.

Podobně pro

$$c_n := \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n})^n + (2\sqrt{n})^n}}{\sqrt{n}} \ge \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n})^n + 1}}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

dostaneme

$$c_n = \frac{\sqrt[n]{(2\sqrt{n})^n + (2\sqrt{n})^n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt[n]{2(2\sqrt{n})^n}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt[n]{2},$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{2} = 2$, podle věty o aritmetice limit a s využitím znalosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Protože podle (1)–(3) je $b_n \le a_n \le c_n$, a protože jsme právě spočetli, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$, existuje podle věty „o dvou strážnících“ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- odhady (1)–(3) .... každý 3 body, celkem 9 bodů
- limita b_n, včetně odůvodnění .... 2 body
- limita c_n, včetně odůvodnění .... 2 body
- odůvodnění pomocí strážníků .... 2 body

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\cos 2x - \cos x}.$$

(15 bodů)

Řešení :

Výpočet provedeme dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidla typu „$\frac{0}{0}$“. Označme

$$f(x) := \sqrt[4]{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x}\,, \qquad g(x) := \cos 2x - \cos x\,.$$

Je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\cos 2x - \cos x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cdot\frac{1}{4}(1-4x)^{-\frac{3}{4}} + 3\cdot\frac{1}{3}(1-3x)^{-\frac{2}{3}}}{-2\sin 2x + \sin x} \left(= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right), \tag{4}$$

kde „$\overset{\text{l'H}}{=}$“ značí „pokud existuje limita vpravo“.

Protože je však i

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0,$$

lze uvedený postup použít ještě jednou, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(1-4x)^{-\frac{3}{4}} + (1-3x)^{-\frac{2}{3}}}{-2\sin 2x + \sin x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cdot\frac{3}{4}(1-4x)^{-\frac{7}{4}} + 3\cdot\frac{2}{3}(1-3x)^{-\frac{5}{3}}}{-4\cos 2x + \cos x} = \frac{1}{3}, \tag{5}$$

podle věty o aritmetice limit.

Protože limita vpravo v (5) existuje, je (podle věty o l'Hospitalově pravidle) rovna limitě vlevo v (5). To je ovšem limita vpravo v (4), která tedy existuje, a proto (opět podle věty o l'Hospitalově pravidle) existuje i limita vlevo v (4), a je rovna $\frac{1}{3}$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zjištění, že jde o „$\frac{0}{0}$“, u prvního l'Hospitala .... 2 body
- postup (4), včetně odůvodnění .... 5 bodů
- zjištění, že jde o „$\frac{0}{0}$“, u druhého l'Hospitala .... 2 body
- postup (5), včetně odůvodnění a výsledku .... 6 bodů

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele tohoto zlomku dvojím použitím vzorce $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (například pro úpravu čitatele klademe $A = \sqrt[3]{n^3+1}$, $B = n$) dostaneme

$$a_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} \cdot \frac{(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}}{1}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots + 2)$ a $(\cdots + 1)$ ve výrazech výše, a_n se tedy „chová jako“

$$b_n := \frac{n^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Mimo jiné je nyní vidět, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left[(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} = \\ &= \frac{\left[\left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]\cdot n^2}.\end{aligned}$$

Po vykrácení tohoto zlomku výrazem n^2 tedy dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{7}$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady mají nezáporné členy, takže z (7) a z (6) plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n (rozšíření zlomku) .... 4 body
- určení b_n .... 4 body
- ověření (7) .... 4 body
- odůvodnění .... 3 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor f, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (neboť je složením spojitých funkcí exp, arctg, a podílu dvou spojitých funkcí, přičemž jmenovatel $x^2 - 1$ je na $\mathcal{D}(f)$ nenulový), dále je f na $\mathcal{D}(f)$ sudá a kladná ($f > 0$ na $\mathcal{D}(f)$).
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1+} f(x) &= \exp\frac{\pi}{2} \approx 4.81 \qquad && \Big(= \lim_{x\to-1-} f(x) \text{ ze sudosti}\Big)\,,\\
\lim_{x\to1-} f(x) &= \exp\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \approx 0.208 && \Big(= \lim_{x\to-1+} f(x)\Big),\\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= 1\,, \qquad \text{odkud rovněž plyne} && \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\,.
\end{aligned}$$

  Poslední dvě (dvoj)limity tedy zároveň říkají, že asymptotou funkce f jak v $+\infty$, tak v $-\infty$, je přímka $y = 1$.
- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ je

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} \cdot (-1)\,\frac{2x}{(x^2-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\,\frac{-2x}{(x^2-1)^2 + 1}\,,$$

  funkce f tedy roste na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$, a klesá na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$. V bodě 0 je tedy lokální maximum hodnoty $f(0) = \exp(-\pi/4) \approx 0.456$, $f'(0) = 0$. V bodech ±1 není f definovaná, nemá tam tedy ani jednostranné derivace z žádné ze stran. Pro náčrt grafu je však možná dobré si spočítat limitní polohy tečen, tj. limity derivací (pozor na znaménka derivace v symetrických bodech, derivace sudé funkce je funkce lichá):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1-} f'(x) &= -\lim_{x\to-1+} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{e^\pi}} \approx -0.416\,,\\
\lim_{x\to1+} f'(x) &= -\lim_{x\to-1-} f'(x) = -2\sqrt{e^\pi} \approx -9.62\,.
\end{aligned}$$

- Obor hodnot: uvážením všech dosud získaných informací vidíme (náčrtek jistě také pomůže), že obor hodnot

$$\mathcal{H}(f) = \Big(\exp\Big(-\frac{\pi}{2}\Big), \exp\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) \cup \Big(1, \exp\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\,.$$

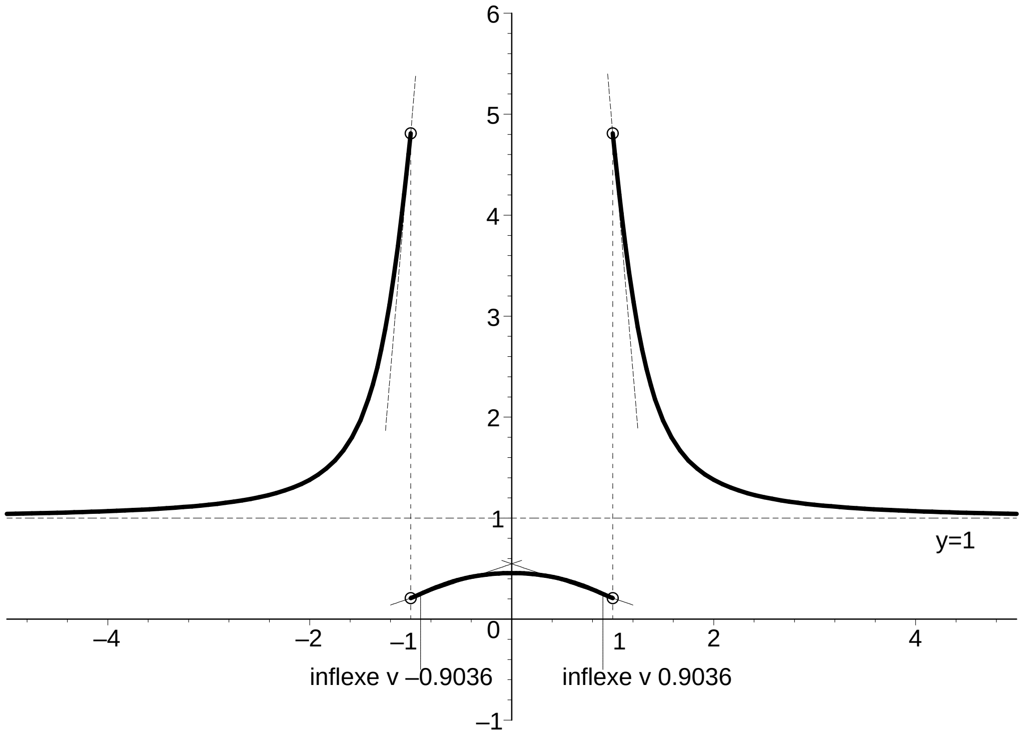
- Druhá derivace po úpravě vyjde:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}\right)'\right] =\\
&= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\frac{4x^2 - 2\big((x^2-1)^2+1\big) + 2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\big((x^2-1)^2+1\big)^2}\right] =\\
&= 2e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\,\frac{3x^4-2}{\big((x^2-1)^2+1\big)^2} \qquad x \neq -1, 1\,.
\end{aligned}$$

Pouze čitatel zlomku výše mění znaménko. Výraz v čitateli má dva reálné kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2/3} \approx \pm 0.9036 \in \mathcal{D}(f)$.

Funkce f je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, -\sqrt[4]{2/3})$, $(\sqrt[4]{2/3}, 1)$ a $(1, +\infty)$, a konkávní na $(-\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3})$, a v bodech $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2/3}$ má inflexní body.

- Graf funkce f, načrtnutý na základě všech výše uvedených informací, je tento:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor .... 1 bod
- spojitost, sudost .... 1 bod
- limity v krajích definičního oboru, asymptoty .... 2 body
- výpočet první derivace .... 1 bod
- monotonie, lokální extrémy, limity derivací .... 2 body
- obor hodnot .... 2 body
- výpočet druhé derivace .... 2 body
- konvexita, konkávita, inflexe .... 2 body
- graf .... 2 body
