Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (7) LS 2008-09, 16. 9. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x}-1 &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,\\
\sin(\sqrt{1+2x}-1) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,\\
(1+4x)^{1/4} &= 1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x^3-\frac{77}{8}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,\\
\cos(x^4) &= 1+o(x^4), \qquad x\to 0.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$f(x)=-\frac{19}{6}x^3+\frac{37}{4}x^4+o(x^4), \qquad x\to 0,$$

a tedy

$$T_4^{f,0}(x)=-\frac{19}{6}x^3+\frac{37}{4}x^4.$$

Dále platí

$$\arcsin(\operatorname{arctg} x)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3), \qquad x\to 0.$$

Pro jmenovatele proto dostáváme

$$\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\sin(x)+x^3=x^3+o(x^3), \qquad x\to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\sin(x)+x^3}=-\frac{19}{6}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozvoj f .... 7 bodů
- rozvoj jmenovatele .... 6 bodů
- výpočet limity .... 2 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybný zápis Taylorova polynomu .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 2 :

- Nejprve upravíme:

$$\cos(3n+2) = \cos 3n \cos 2 - \sin 3n \sin 2.$$

  Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 3n$ omezené částečné součty.

- Posloupnost $\left\{\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je pro všechna $n > 2$ klesající (jak lze ověřit například derivováním funkce $\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$), proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$, a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2) =$$

$$= \cos 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n - \sin 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$$

  konverguje, neboť je lineární kombinací konvergentních řad.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro kosinus .... 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3n)$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$ .... 2 body
- $\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ jde monotónně k nule .... 5 bodů
- použití (zmínění) Dirichletova kritéria .... 2 body
- lineární kombinace konvergentních řad je konvergentní řada .... 1 bod

---

Příklad 3 : Integrand rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{x^4+3x^3+10x^2+12x+13}{(1+x)(x^2+x+3)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x+3} + \frac{x+1}{(x^2+x+3)^2}.$$

Primitivní funkce k jednotlivým parciálním zlomkům na příslušných intervalech vypadají takto:

$$\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x+1|,$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}},$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{x^2+x+3} + \frac{2}{121}\sqrt{11}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}.$$

Dohromady potom máme

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+3x^3+10x^2+12x+13}{(1+x)(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\ \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{x^2+x+3} + \frac{2}{121}\sqrt{11}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \\ = \log|x+1| + \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{x^2+x+3} + \frac{24}{11\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozklad na parciální zlomky .... 5 bodů
- integrace racionální funkce .... 8 bodů
- výsledek, definiční obor .... 2 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 :

Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}x^\beta = x^{3\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0,1/2]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = (\frac{1}{6})^\alpha \pi^\beta \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1-x)^\beta(1-x)^\alpha = (1-x)^{\alpha+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2,1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) = (\pi/2-1)^\alpha \pi^\beta (\pi/2)^\alpha \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1\ \&\ \alpha + \beta > -1)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- bod 0 .... 7 bodů
- bod 1 .... 7 bodů
- závěr .... 1 bod
