Řešení

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
1+\arcsin\left(x^2\right) &= 1+x^2+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,\\
\left(1+\arcsin\left(x^2\right)\right)^{2/3} &= 1+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,\\
\sqrt{\mathrm{e}^{(x^2)}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right), \qquad x\to 0,\\
\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{1}{6}x^2+o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\left(1+\arcsin\left(x^2\right)\right)^{2/3}-\sqrt{\mathrm{e}^{(x^2)}}-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{17}{72}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,$$

a tedy

$$T_5^{f,0}(x) = -\frac{17}{72}x^4.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sin(2\,x) &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^5\right)\right)\cdot\left(2\,x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o\left(x^5\right)\right) =\\
&= 2\,x^2-\frac{5}{3}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,\\
\arcsin(x)\arcsin(2\,x) &= \left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o\left(x^5\right)\right)\cdot\left(2\,x+\frac{4}{3}x^3+\frac{12}{5}x^5+o\left(x^5\right)\right) =\\
&= 2\,x^2+\frac{5}{3}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0.
\end{aligned}$$

Pro jmenovatele proto dostáváme

$$(\sin x)(\sin 2x)-(\arcsin x)(\arcsin 2x) = -\frac{10}{3}x^4+o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin x)(\sin 2x)-(\arcsin x)(\arcsin 2x)} = \frac{17}{240}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozvoj f .... 7 bodů
- rozvoj jmenovatele .... 6 bodů
- výpočet limity .... 2 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybný zápis Taylorova polynomu .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo i Abelovo kritérium:

- Nejprve upravíme:

$$\sin(2n+1) = \sin 2n \cos 1 + \cos 2n \sin 1.$$

  Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n$ omezené částečné součty. **Pozor**, nebylo možno argumentovat tak, že omezenost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n+1)$ plyne z toho, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$.
- Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je klesající, proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$, a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos 1 \cdot \frac{\sin 2n}{n} + \sin 1 \cdot \frac{\cos 2n}{n} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Protože $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost a funkce arctg je rostoucí a omezená funkce, je posloupnost $\{\operatorname{arctg} \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a omezená. Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{n} \sin(2n+1) \quad \text{konverguje.}$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro sinus .... 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sin 2n$ resp. $\cos 2n$ .... 2 body
- $1/n$ jde monotónně k nule .... 1 bod
- použití Dirichletova kritéria .... 1 bod
- monotonie $\operatorname{arctg} \sqrt{n}$ .... 3 body
- omezenost $\operatorname{arctg} \sqrt{n}$ .... 2 body
- použití Abelova kritéria .... 1 bod

Příklad 3 :

Jmenovatel integrandu je roven $\left(\cos^2 x+1\right)^2$, proto je integrovaná funkce definovaná na celém $\mathbf{R}$ a má (spojitou) primitivní funkci na $\mathbf{R}$. Integrand je typu $R(\sin x, \cos x)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Platí $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, proto použijeme substituci $\cos x = t$, $-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Podle věty o substituci (1. typu, kde využijeme $(\cos x)' = -\sin x \in \mathbf{R}$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$) dostaneme

$$\int \frac{\sin x - \sin x\cos^2 x}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Technikou rozkladu na parciální zlomky (nebo jednoduchou úpravou $\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} = \frac{(t^2+1)-2}{(t^2+1)^2}$) zjistíme

$$\int \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{(t^2+1)^2}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} \operatorname{arctg} t - \left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) = -\frac{t}{t^2+1}, \quad t \in \mathbf{R},$$

kde druhý z integrálů spočteme například z rekurentního vzorce pro integrály typu $\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$.

Celkem tedy dostaneme (výsledná funkce je spojitá a definovaná na celém $\mathbf{R}$)

$$\int \frac{\sin x - \sin x\cos^2 x}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\frac{\cos x}{\cos^2 x + 1}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- volba vhodné substituce .... 3 body
- převod na integraci racionální funkce .... 3 body
- rozklad na parciální zlomky .... 3 body
- integrace racionální funkce .... 4 body
- výsledek, definiční obor .... 2 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 :

Označíme

$$f(x) := (x - \operatorname{arctg} x)^\alpha \frac{\cos^\beta\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin^\alpha(\pi x)}$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Pišme

$$f(x) = \left(\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}\right)^\alpha \cdot \cos^\beta\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)^\alpha \cdot x^{3\alpha-\alpha}. \tag{2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = x^{2\alpha}$, dostaneme z (2) standardním výpočtem (v závorce s arkustangentou použijeme třeba $3\times$ l'Hospitalovo pravidlo nebo Taylorův rozvoj), že $\lim\limits_{x\to0+} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Funkce g je na intervalu $(0,1/2]$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Tento integrál však konverguje, právě když $2\alpha > -1$.

Bod 1. Pišme

$$f(x) = (x - \operatorname{arctg} x)^\alpha \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}\right)^\beta \cdot \left(\frac{1-x}{\sin(\pi x)}\right)^\alpha \cdot (1-x)^{\beta-\alpha}. \tag{3}$$

Položíme-li tedy $g(x) = (1-x)^{\beta-\alpha}$, dostaneme z (3) standardním výpočtem (v závorkách se sinem a kosinem použijeme třeba l'Hospitalovo pravidlo), že $\lim\limits_{x\to1-} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Funkce g je na intervalu $[1/2, 1\pi)$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta - \alpha > -1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(2\alpha > -1 \;\&\; \beta - \alpha > -1)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- chování u bodu 0 .... 7 bodů
- chování u bodu 1 .... 7 bodů
- závěr .... 1 bod
