Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (5) LS 2008-09, 24. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Platí

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \qquad x \to 0,$$
$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Odtud dostáváme

$$\cos(\sin x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$
$$\sin(\cos x - 1) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Tedy máme

$$\cos(\sin x) - 1 - \sin(\cos x - 1) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$

a proto je

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{6}x^4.$$

Jmenovatele je (za účelem spočtení limity) možno počítat pouze s Peanovým tvarem zbytku $o(x^4), x \to 0$, píšeme tedy

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$
$$\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{54}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$

odkud

$$\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0.$$

Dále dostaneme

$$\sqrt{\cos(2x)} = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0,$$

a proto po úpravě

$$\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \qquad x \to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\log(1+x) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) - \sqrt{\cos(2x)} - x + \cos x} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$. Proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost $\left\{n \sin \frac{1}{n} - 1\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je monotónní:
- Limita se spočítá snadno, je totiž

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$$

  a proto i (podle Heineho věty) $\lim \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) = 0$.
- Pro zjištění monotonie označme

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} - 1, \qquad \text{pak} \qquad f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

  a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} < 0 \qquad \text{pro } x > \tfrac{1}{\pi}.$$

  Odtud plyne, že funkce f' je klesající na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ a protože $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, je funkce f' kladná na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$. To ovšem znamená, že funkce f je rostoucí na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$, což jsme chtěli ukázat.

  Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) \sin 3n \ \ \text{konverguje.} \tag{1}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) \sin 3n\right| \le \left|n \sin \frac{1}{n} - 1\right| = 1 - n \sin \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6},$$

je (podle Heineho věty) i

$$\lim \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} \in (0, +\infty),$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)$ tedy konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato však konverguje, proto konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) \sin 3n$ konverguje absolutně.

Příklad 3 : Platí $5\cos^2 x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x = (2\cos x + \sin x)^2 + \cos^2 x$, a protože funkce sin a cos nejsou v žádném reálném bodě současně rovny nule, je jmenovatel integrandu kladný pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Integrand je tedy spojitý na $\mathbf{R}$ a má (spojitou) primitivní funkci na celém $\mathbf{R}$.

Použijeme substituci $\operatorname{tg} x = y$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$, kde uvažujeme $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in \mathbf{R}$. Po substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+4y+5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+2)^2+1} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(2+y), \qquad y \in \mathbf{R}\,.$$

Funkce

$$F_0(x) := \operatorname{arctg}(2 + \operatorname{tg} x)$$

je tedy primitivní k funkci $f(x) := \frac{1}{5\cos^2 x + 4\sin x\cos x}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Přímým výpočtem lze ověřit, že F_0 je primitivní k f i na všech intervalech tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pro zkonstruování primitivní funkce k f na celém $\mathbf{R}$ použijeme techniku „lepení“. Spočteme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F_0(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} F_0(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

v každém z bodů $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ je tedy potřeba „odstranit skok“ velikosti π. Proto je funkce

$$F(x) := \begin{cases} F_0(x) + k\pi\,, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)\,,\ \ k \in \mathbf{Z}\,, \\[2ex] \frac{\pi}{2} + k\pi\,, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

primitivní k funkci f na celém $\mathbf{R}$. Všechny funkce, primitivní k f na $\mathbf{R}$, mají pak tvar $F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$.

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)$$

pro $x \in (0, 2\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0, 2\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0**.** Pišme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x})}{x^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\beta} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{2}$$

Položíme-li tedy $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}+\beta}$, dostaneme z (2) standardním výpočtem, že $\lim\limits_{x\to0+} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Funkce g je na intervalu $(0, \pi]$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$. Tento integrál však konverguje, právě když $\frac{\alpha}{2} + \beta > -1$.

Bod 2π**.** Pišme

$$f(x) = \operatorname{arctg}^\alpha(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - \frac{x}{2}}\right)^\beta \cdot \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta. \tag{3}$$

Položíme-li tedy $g(x) = \left(\pi - \frac{x}{2}\right)^\beta$, dostaneme z (3) standardním výpočtem, že $\lim\limits_{x\to2\pi-} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$. Funkce g je na intervalu $[\pi, 2\pi)$ kladná a spojitá, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_\pi^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_\pi^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta > -1$.

Závěr: $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\frac{\alpha}{2} + \beta > -1 \ \&\ \beta > -1)$.
