Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (4)
LS 2008-09, 17. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Platí

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{5}(x + o(x^2))^5 + o(\sin^5 x)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) &= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Pak dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Pro jmenovatele dostáváme

$$(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x} = -\frac{6}{5}.$$

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Víme, že posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost $\left\{\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je rostoucí: pro $x > 0$ označme $f(x) := \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; potom $f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} > 0$ (pro všechna $x > 0$). Posloupnost

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \cdot \cos n \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \cdot \cos n\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y+2} + 4\log(y+2) - \frac{1}{y+1} - 4\log(y+1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} + 4\log\left(\frac{y+2}{y+1}\right)\right]_0^{\infty} = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1-x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = x^{3\alpha}(\pi x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $(0, 1/2]$ kladná, spojitá a nepříliš těžký výpočet (například s využitím Taylorova polynomu pro funkci arcsin z příkladu 1) ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^{1/2} g(x)\,\mathrm{d}x$ přičemž tento integrál konverguje, právě když $3\alpha + \beta > -1$.

Bod 1. Položme $g(x) = (1-x)^{-\alpha} \cdot (1-x)^{\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1/2, 1)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 1-} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_{1/2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_{1/2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha + \beta > -1$, tj. $\alpha - \beta < 1$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(3\alpha + \beta > -1\ \&\ \alpha - \beta < 1)$.
