Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (3) LS 2008-09, 10. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} &= 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3+o(y^3), \qquad y\to 0,\\
\sqrt{1+x^2} &= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,\\
\cos x\cdot\cos x^2 &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{24}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0,\\
\sqrt{1+x^2}-\cos x\cdot\cos x^2-x^2 &= \frac{1}{3}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$T_5^{f,0}(x)=\frac{1}{3}x^4.$$

Pokud jde o jmenovatele, tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\sqrt{e^{x^2}} &= \sqrt{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)}\\
&= 1+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)^2+\frac{1}{16}\left(x^2+\frac{1}{4}x^4+o(x^5)\right)^3+o(x^6)\\
&= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0.
\end{aligned}$$

Pak platí

$$\sqrt{e^{x^2}}-\cos(x)-x^2=\frac{1}{12}x^4+o(x^5), \qquad x\to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}-\cos(x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^5)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}=4.$$

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ má omezené částečné součty pro všechna $x\in\mathbf{R}$, proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n$ má omezené částečné součty.
- Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \lim_{y\to 0+}\left(1-\frac{\log(1+y)}{y}\right)=0,
\end{aligned}$$

tedy i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n=0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-(\log(x+1)-\log x)\,.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x\in(0,\infty)$ existuje $\xi_x\in(0,1)$ takové, že

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\xi_x}<0 \qquad \text{pro všechna } x>0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n=f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x)=\frac{1}{x(1+x)^2},\qquad x\in(0,\infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1}=t$, tj. $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$I:=\int_0^1\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}=\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int\left(\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t\stackrel{c}{=}\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I=\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x)=\frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x\in(0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x)=\frac{x^\alpha x^\beta}{x^2}=x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+}f(x)/g(x)=\pi^{-3}\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha+\beta>1$.

Bod π. Položme $g(x)=(\pi-x)^{-3}(\pi-x)^{\beta}=(\pi-x)^{-3+\beta}$. Funkce g je na intervalu $[1,\pi)$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to\pi-} f(x)/g(x)\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\int_1^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\beta>2$.

Závěr: $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $(\alpha+\beta>1\ \&\ \beta>2)$.
