Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (2) LS 2008-09, 3. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5), \quad x \to 0, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad x \to 0,$$

a proto

$$\exp(x^2)\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + o(x^5) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dále platí

$$\sin(xe^{x^2}) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(x + x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + o(x^2)\right)^5 + o((xe^{x^2})^5), \qquad x \to 0.$$

Platí $\lim_{x\to 0} xe^{x^2}/x = 1$ a můžeme tedy psát $o(x^5)$ místo $o((xe^{x^2})^5)$. Pak máme

$$\sin(xe^{x^2}) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dohromady:

$$\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2)) = \frac{x^5}{3} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a proto

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{x^5}{3}.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x) = x^3 + o(x^5) - \sin\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)\right) = \frac{x^5}{6} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2))}{\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{\frac{x^5}{6} + o(x^5)} = 2.$$

Příklad 2 : Použijeme dvakrát Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{n}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{3}$$

- Protože posloupnost $\cos\frac{1}{n}$ je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} \cdot \cos\frac{1}{n}.$$

Závěr: řada konverguje.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tato substituce převede uvažovaný integrál na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\,\mathrm{d}t.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)} = \frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1}.$$

Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme

$$\int \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(t^2+t+2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \qquad \text{na } \mathbf{R}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+2}{t^2+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right). \end{aligned}$$

Poznámka: Pozor! Rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

Příklad 4 : Integrand $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Integrál tedy $\int_0^{\pi/2} f$ tedy konverguje, právě když konvergují integrály $\int_0^{\pi/4} f$ a $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$.

- Integrál $\int_0^{\pi/4} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$ definovanou na $(0, \pi/4]$. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{\pi/4} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

• Integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = (\pi/2 - x)^{-\alpha}$ definovanou na $[\pi/4, \pi/2)$. Platí $\lim_{x \to \pi/2-} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha} \, \mathrm{d}x$. Poslední integrál konverguje, právě když $-\alpha > -1$.

Závěr: Integrál $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x \sin^\beta x \, \mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$ a $\alpha < 1$.
