Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (1)
LS 2008-09, 27. 5. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 + \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)} = \cdots = 1 - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

(s využitím rozvoje $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$, $y \to 0$, a vlastností symbolu „o“). Dále dostaneme:

$$2\exp(x^2) = 2 + 2x^2 + x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

což dohromady dá

$$\sqrt{\cos 2x} - 2\exp(x^2) + 1 + 3x^2 = -\frac{7}{6}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

a proto

$$T_4^{f,0}(x) = -\frac{7}{6}x^4.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\cos x^2 - \cos x - \frac{x^2}{2} = -\frac{13}{24}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 2\exp(x^2) + 1 + 3x^2}{\cos(x^2) - \cos x - \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4 + o(x^4)}{-\frac{13}{24}x^4 + o(x^4)} = \frac{28}{13}.$$

Příklad 2 : Použijeme nejprve Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{2n+\frac{100}{n}}$ konveguje k nule a od jistého indexu je monotónní (neboť například derivace funkce $f(x) := 2x + \frac{100}{x}$ je $f'(x) = 2 - \frac{100}{x^2}$; pro všechna $x > \sqrt{50}$ je $f'(x) > 0$, proto je funkce $2x + \frac{100}{x}$ rostoucí na $(\sqrt{50}, \infty)$ a funkce $\frac{1}{2x+\frac{100}{x}}$ klesající na $(\sqrt{50}, \infty)$). Podle Dirichletova kritéria (odůvodněte vše podrobně) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Protože posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)^3$ je rostoucí a omezená, konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (1)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Závěr: řada konverguje.

Poznámka: bylo možno také použít rovnou Dirichletovo kritérium:

Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty a derivace funkce $\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}{2x+\frac{100}{x}}$ je od jistého $x_0 \in \mathbf{R}$ záporná, tedy tato funkce klesá na okolí nekonečna, a snadno se také ukáže, že má v nekonečnu nulovou limitu. V tomto případě je ovšem výpočet derivace výše uvedené funkce a zjištění jejího chování v blízkosti nekonečna poněkud obtížnější, i když proveditelné.

Příklad 3 : Integrovaná funkce je definovaná na $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, primitivní funkci tedy hledáme na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Při použití substituce $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ dostaneme postupně (všimněte si, že pro žádné $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ nemůže být t^2 být rovno 1):

$$x=\frac{t^2-2}{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(x+1)(4x+5)(2x+3)=-\frac{(t^2+3)(t^2+1)}{(1-t^2)^3}, \qquad (3x+4)=-\frac{t^2+2}{1-t^2},$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t\stackrel{c}{=}-\operatorname{arctg}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\,,\ t\in\mathbf{R}\,,$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,\mathrm{d}x\stackrel{c}{=}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)$$

na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Příklad 4 : Označíme

$$I:=\int_0^{\infty}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$I_1:=\int_0^{1}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$I_\infty:=\int_1^{\infty}(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pro vyšetření chování integrálu I_0 použijeme

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}}{x^{a+1}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^a\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x+1}=1\,,$$

proto I_0 konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě když konverguje $\int_0^1 x^{a+1}\,\mathrm{d}x$, což je právě tehdy, když $a>-2$.

Pro vyšetření chování integrálu I_∞ použijeme následující úvahu: protože $(\operatorname{arctg} x)^a$ je na $(1, +\infty)$ monotónní a omezená funkce pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ (ukažte to podrobně), bude podle Abelova kritéria stačit, když bude konvergovat integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál však konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\sin x$ má na $(1, +\infty)$ omezenou primitivní funkci a $\frac{1}{2x+1}$ jde monotónně k nule pro $x \to +\infty$.

Závěr: I konverguje, právě když $a > -2$.
