Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1a (VZOR)
LS 2008-09, 15. 5. 2009

Příklad 1 : Nalezněte Taylorův polynom funkce
$$f(x) = e^x \sin(2x) - 2\log(1+\sin x) - 3x^2$$
řádu 4 v bodě $x = 0$, a spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x\,\cos(\sin x) - \sin x}\,.$$
Zde log je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení : S využitím Taylorových polynomů elementárních funkcí, věty o Peanově tvaru zbytku a podle pravidel zacházení se symbolem „o“ obdržíme postupně tyto rovnosti:
$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,\\
e^x \sin 2x &= \left(2x - \frac{4x^3}{3}\right) + \left(2x^2 - \frac{4x^4}{3}\right) + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) =\\
&= 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,
\end{aligned}$$
Dále je $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$, $y \to 0$, a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Proto máme podle těchže pravidel jako výše
$$\log(1+\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) + o((\sin x)^4)\,, \quad x \to 0\,.$$
Protože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} = 1$, je $o((\sin x)^4) = o(x^4)$, $x \to 0$, podle věty o záměně funkce uvnitř symbolu „o“, a proto
$$\log(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.$$
Celkově tedy máme
$$e^x \sin 2x - 2\log(1+\sin x) - 3x^2 = -\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.$$
Taylorův polynom funkce $e^x \sin 2x - 2\log(1+\sin x) - 3x^2$ řádu 4 v bodě $x = 0$ je tedy $-\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6}$. Podobně dostaneme
$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\,, \quad x \to 0\,,\\
x\cos(\sin x) &= x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,\\
x\cos(\sin x) - \sin x &= -\frac{x^3}{3} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.
\end{aligned}$$
Tedy, na základě vlastností symbolu „o“ a podle věty o aritmetice limit, máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin 2x - 2\log(1+\sin x) - 3x^2}{x\cos(\sin x) - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3} - \frac{5x}{6} + \frac{o(x^4)}{x^4}x}{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}x} = 2\,.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- rozvoj $e^x \sin(2x)$ .... 5 bodů
- rozvoj $\log(1 + \sin x)$ .... 4 body
- rozvoj $\cos(\sin x)$ .... 3 body
- výpočet limity .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybný zápis Taylorova polynomu .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})\,.$$

(15 bodů)

Řešení : Využijeme znalost, že posloupnost (částečných součtů) $\sum_{n=1}^{N} \sin nx$ je pro pevné $x \in \mathbf{R}$ omezená – tedy že pro dané $x \in \mathbf{R}$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $N \in \mathbf{N}$ platí

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| < K\,.$$

Pro $x = \sqrt{\pi}$ tedy dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\sqrt{\pi})$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pro ověření konvergence řady použijeme Dirichletovo kritérium, tedy bude stačit, pokud ukážeme, že

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} = 0\,,$

(ii) $\displaystyle\frac{n^{10}}{2^n+1}$ je monotónní posloupnost, alespoň od jistého indexu n_0.

Ad (i): Výpočet uvedené limity není obtížný, snadno ji spočtete některou z metod 1. semestru.

Ad (ii): označme $a_n := \frac{n^{10}}{2^n+1} > 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}\cdot(2^n+1)}{n^{10}\cdot(2^{n+1}+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1\,, \tag{1}$$

tedy jistě existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$, tedy $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$.

Jiný způsob, jak zjistit monotonii, je zkoumat znaménko derivace pomocné funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x+1}\,, \qquad \text{tj.} \qquad f'(x) = \frac{x^9 2^x}{(2^x+1)^2}\left[10 + \frac{10}{2^x} - x\log 2\right]\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Protože výraz v hranatých závorkách jde k mínus nekonečnu pro $x \to +\infty$, existuje určitě takové $x_0 \in \mathbf{R}$, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x > x_0$. Funkce f tedy klesá na intervalu $(x_0, +\infty)$, proto $a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n > x_0$.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka : Tento postup ukazuje, jak asi pracovat (zdůvodňovat) v případě použití Abel-Dirichletova kritéria. Pro tuto konkrétní řadu však existovalo mnohem jednodušší řešení: protože

$$\left|\frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})\right| \leq \frac{n^{10}}{2^n+1} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N}\,,$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1}$ konverguje dle podílového kritéria – viz (1), konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})$ absolutně, a tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zdůvodnění omezenosti částečných součtů .... 2 body
- výpočet limity .... 4 body
- ověření monotonie .... 6 bodů
- aplikace kritéria a závěr .... 3 body

Příklad 3 : Nalezněte primitivní funkci:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

(15 bodů)

Řešení :

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$. Potom máme

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{d}x=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tato substituce převádí naši úlohu na integraci racionální funkce:

$$\int \frac{-2\frac{t^2-1}{1+2t}+t}{t}\cdot\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}+\frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Pro každé $t\in\mathbf{R}$ musí platit:

$$2t^3+6t^2+6t+4=A(1+2t)^3+Bt(1+2t)^2+Ct(1+2t)+Dt.$$

Dosazením $t=0$ a $t=-1/2$ dostáváme $A=4$ a $D=-9/2$. Porovnáním koeficientů u t^3 a t^2 pak dostaneme $B=-15/2$ a $C=-6$.

Potom máme

$$\int\left(\frac{4}{t}-\frac{15}{2(1+2t)}-\frac{6}{(1+2t)^2}-\frac{9}{2(1+2t)^3}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} 4\log t-\frac{15}{4}\log(1+2t)+\frac{3}{1+2t}+\frac{9}{8(1+2t)^2}$$

na intervalech $(-\infty,-1/2)$, $(-1/2,0)$ a $(0,\infty)$. Na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$ dostáváme řešení

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=}$$
$$4\log(\sqrt{x^2+x+1}+x)-\frac{15}{4}\log(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x)$$
$$+\frac{3}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+\frac{9}{8(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x)^2}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- volba vhodné substituce .... 2 body
- převod na integraci racionální funkce .... 2 body
- rozklad na parciální zlomky .... 6 bodů
- integrace racionální funkce .... 3 body
- výsledek .... 2 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- chybí obor integrace .... 3 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Příklad 4 : Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, konverguje následující Newtonův integrál:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(15 bodů)

Řešení : Pišme

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)\,\mathrm{d}x =: I_0 + I_\infty\,.$$

(1) Protože $f(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x) \in \mathcal{C}((0,1])$, závisí konvergence integrálu I_0 na chování funkce f „u nuly“. Máme $f(x) > 0$ pro $x \in (0,1]$, a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \sin(2x)}{\frac{1}{x^{a-3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{x^{a-3}}{x^a} = 2$$

je vlastní a nenulová. Proto podle limitního srovnávacího kritéria pro Newtonův integrál konverguje integrál I_0 právě tehdy, když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál však konverguje právě tehdy, když $a - 3 < 1$ neboli $a < 4$, jak lze ověřit například jeho přímým výpočtem.

(2) Je $f \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, ale f „střídá znaménko blízko nekonečna“. Protože funkce $\sin 2x$ má na intervalu $(1,+\infty)$ omezenou primitivní funkci $(-\frac{1}{2}\cos 2x)$, a $\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} \in \mathcal{C}([1,+\infty))$, bude podle Dirichletova kritéria pro konvergenci Newtonova integrálu stačit, když ukážeme (přesněji, když najdeme taková $a \in \mathbf{R}, a > 0$, pro která platí):

(i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a} = 0\,,$$

(ii) $\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je monotónní na nějakém okolí bodu nekonečno.

Ad (i): pro všechna $x > 0$ platí

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}\right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^a} \to 0 \qquad \text{když } x \to +\infty\,, \quad \text{pro všechna } a \in \mathbf{R},\ a > 0,$$

odkud plyne (i) pro všechna $a \in \mathbf{R}, a > 0$.

Ad (ii): derivace funkce $g(x) := \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^a}$ je

$$g'(x) = \frac{x^4}{(1+x^4)\,x^{a+1}} \left[\frac{2}{x^2} - a \cdot \operatorname{arctg} x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)\right]\,, \quad x > 0\,.$$

Výraz v hranaté závorce má pro $x \to +\infty$ limitu $-a\frac{\pi}{2}$, který je pro $a > 0$ záporný. Existuje tedy $x_0 \in \mathbf{R}$ takové, že $g'(x) < 0$ pro všechna $x \in (x_0, +\infty)$. Odtud plyne (ii).

Závěr: daný integrál konverguje pro $a \in (0,4)$.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- konvergence na okolí nuly .... 5 bodů
- ověření monotonie .... 5 bodů
- ověření omezenosti primitivní funkce .... 2 body
- aplikace kritéria a závěr .... 3 body