Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 10}}$ **6.12.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

10.1 Fourierova metoda řešení rovnice vedení tepla na intervalu v $\mathbb{R}^1$

• Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka
Řešte následující úlohu pro rovnici vedení tepla ($L > 0$, $T > 0$):

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in \langle 0, T\rangle\,. \end{array} \tag{10.1}$$

<u>Návod:</u>

- Funkci $u(x, t)$ závislou na čase (t) i prostoru (x), hledejme v separovaném tvaru
$$u(x, t) = X(x)Y(t),$$
po dosazení do rovnice (10.1) dostaneme (za standardního předpokladu identické nenulovovsti X a T)
$$\frac{1}{a^2Y(t)}\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}\,,$$
což vede opět k požadavku existence konstanty λ takové, že
$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda\,, \tag{10.2}$$
$$\frac{1}{a^2Y(t)}\frac{dY(t)}{dt} = \lambda\,. \tag{10.3}$$
Okrajové podmínky pro rovnici (10.2) dostaneme ze zadání (10.1), a sice $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$, což plyne z podmínek plynou z $u(0, t) = 0$ a $u(L, t) = 0$. Okrajové podmínky pro funkci Y nelze v této chvíli jednoduše zformulovat. I to je důvod, proč řešíme nejprve úlohu pro X.
- Řešení úlohy pro funkci X se principiálně liší podle znaménka konstanty λ:
  - je-li $\lambda > 0$, pak je řešením rovnice (10.2) funkce
  $$X(x) = c_1e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{\lambda}},$$
  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Zajímají nás však pouze identicky nenulová řešení, tedy tento případ vyloučíme.
  - je-li $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice (10.2) funkce
  $$X(x) = c_1x + c_2,$$
  kde $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, jak opět plyne z okrajových podmínek, závěr je tedy stejný jako v předchozím případě.
  - je-li $\lambda < 0$, pak je řešením rovnice (10.2) funkce
  $$X(x) = c_1 \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)$$
  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Lze poměrně jednoduše nahlédnout, že netriviální řešení pro X dostaneme pouze v případě, kdy bude konstanta λ tvaru
  $$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{10.4}$$
  Dostali jsme tedy, že všechna netriviální řešení problému pro X vypadají takto:
  $$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{10.5}$$

- Pro λ_n tvaru (10.4) dostaneme rovnici (10.3) pro funkci $Y(t) \equiv Y_n(t)$ ve tvaru

$$\frac{dY_n(t)}{dt} = \lambda_n a^2 Y_n(t),$$

obecným řešením této rovnice je funkce

$$Y_n(t) = a_n e^{\lambda_n a^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}, \tag{10.6}$$

kde a_n jsou libovolné konstanty.

- Našli jsme tedy funkce $u_n(x,t)$, které pro libovolné přirozené číslo n splňují rovnici (10.1) a okrajové podmínky (součin konstant c_n a a_n přeznačíme na c_n),

$$u_n(x,t) = X_n(x) Y_n(x) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) . \tag{10.7}$$

K úplnému řešení problému (10.1) je ještě třeba splnit počáteční podmínku. Řešení celého hledáme jako nekonečnou sumu funkcí $u_n(x,t)$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

v případě „dostatečně rozumné“ konvergence této řady bude funkce u splňovat rovnici i okrajové podmínky. Zbývá vyřešit otázku nabývání počáteční podmínky. Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \langle 0, L\rangle,$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty c_n je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady (předpokládáme tedy, že φ lze takt orozvinout). Koeficienty c_n pak spočteme jako

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx \tag{10.8}$$

a obdrželi jsme (formálně, tj. bez toho, že bychom diskutovali kvalitu konvergence atd...) řešení problému (10.1),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \quad \text{kde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx\,. \tag{10.9}$$

• Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \langle 0, T\rangle\,. \end{array} \tag{10.10}$$

Návod:

- Vyjdeme z toho, že již umíme řešit rovnici s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou, viz (10.9). Předpokládejme nyní, že pravou stranu f lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, tj.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

Řešení problému (10.10) budeme hledat metodou variace konstant v (10.9), tj. píšeme koeficienty c_n v rozvoji funkce $u(x,t)$ jako funkce času

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) .$$

- Dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (10.10), čistě formálně zderivujeme člen po členu, atd... Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dc_n(t)}{dt} e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} - f_n(t)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = 0,$$

což má platit pro každé $x \in (0, L)$ a $t \in (0, T)$. Z jednoznačnosti Fourierových rozvojů tedy plyne, že pro každé n musí být splněna obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = f_n(t) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t},$$

jejímž řešením je

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} d\tau$$

Dosadíme–li takto vypočtené koeficienty $c_n(t)$ do rozvoje funkce $u(x, t)$, bude výsledkem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} d\tau \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right),$$

konstanty $c_n(0)$ určíme z počáteční podmínky úlohy (10.10). Chceme, aby platilo $u(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right) = \varphi(x)$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty $c_n(0)$ je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady.

- Formálním řešením problému (10.10) je tedy funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right) + \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right), \tag{10.11}$$

kde

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int\limits_0^L \varphi(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right) dx\,, \qquad f_n(t) = \frac{2}{L} \int\limits_0^L f(x,t) \sin\left(x\frac{n\pi}{L} \right) dx\,.$$

• Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = 0 & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0, t) = \ell(t) & t \in \langle 0, T\rangle\,, \\ & u(L, t) = p(t)\,. & \end{array} \tag{10.12}$$

<u>Návod:</u> S nenulovými okrajovými podmínkami se vypořádáme tak, že úlohu (10.12) převedeme na úlohu (10.10): funkci $u(x, t)$ hledáme jako součet dvou funkcí

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

kde funkci $v(x, t)$ definujeme takto

$$v(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \ell(t) + \frac{x}{L} p(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} v(0,t) &= \ell(t)\,, \\ v(L,t) &= p(t)\,. \end{aligned}$$

Funkce $v(x, t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (10.12). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x, t)$ do zadání rovnice (10.12), dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{d\ell(t)}{dt} - \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt}\,,$$

a počáteční podmínku pro $w(x, 0) = -v(x, 0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) l(0) + \frac{x}{L} p(0)\right)$. Je tedy vidět, že problém pro funkci w je problém typu „nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka“, který jsme řešili v předchozím bodu.

• Obecný problém: nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\
\text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in \langle 0,L \rangle\,, \\
\text{okrajová podmínka} & u(0,t) = l(t) & t \in \langle 0,T \rangle\,, \\
 & u(L,t) = p(t)\,. &
\end{array}
\tag{10.13}
$$

<u>Návod:</u> Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice a počáteční podmínky. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_r}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínka} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in \langle 0,L \rangle\,, \\
\text{okrajová podmínka} & u_r(0,t) = 0 & t \in \langle 0,T \rangle\,, \\
 & u_r(L,t) = 0\,. &
\end{array}
$$

Toto je problém, který již umíme řešit (zadání viz. (10.10), řešení viz. (10.11)). Druhý problém je tvaru

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_h}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\
\text{počáteční podmínka} & u_h(x,0) = 0 & x \in \langle 0,L \rangle\,, \\
\text{okrajová podmínka} & u_h(0,t) = \ell(t) & t \in \langle 0,T \rangle\,, \\
 & u_h(L,t) = p(t)\,. &
\end{array}
$$

Tento problém jsme již také zkoumali (10.12). Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$, je řešením původní úlohy (10.13).

10.2 Fourierova metoda pro řešení vlnové rovnice na intervalu v $\mathbb{R}^1$

Jde o problém tvaru

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x)\,, & x \in \langle 0,L \rangle\,, \\
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\,, & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = \ell(t)\,, & t \in \langle 0,T \rangle\,, \\
 & u(L,t) = p(t)\,. &
\end{array}
\tag{10.14}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, a že f je funkce proměnných x a t.

<u>Návod:</u> Rozdělte úlohu na dvě úlohy, stejně jako jsme to udělali v případě úlohy (10.13). Postup řešení těchto partikulárních úloh je principiálně stejný jako v případě rovnice vedení tepla, který jsme právě dodiskutovali. Jistě bude cennější, když se pokusíte celý proces si v případě vlnové rovnice projít sami než kdybych jej zde metodou copy-and-paste-and-modify naservíroval.