Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 9}}$ **29.11.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

9.1 Fourierova metoda řešení Laplaceovy rovnice na obdélníku II

• Dirichletova okrajová podmínka „na všech stranách obdélníka"
Máme zadaný problém

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \text{pro } [x,y]\in(0,a)\times(0,b)\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0)=g_1(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(x,b)=g_2(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(0,y)=g_3(x)\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ & u(a,y)=g_4(x)\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{9.1}$$

Opět předpokládáme, že $a>0$, $b>0$, a že v rozích obdélníka $\Omega=(0,a)\times(0,b)$ platí tzv. podmínky souhlasu, tj. platí $g_1(0)=g_3(0)$, $g_1(a)=g_4(0)$, $\dots$, tedy že funkce definované na sousedních stranách obdélníka se rovnají ve společném vrcholu. Okrajovou podmínku pak můžeme pro zkrácení zapisovat $u(x,y)|_{\partial\Omega}=g(x)$, kde $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$.
Úlohu vyřešíme ve dvou krocích. Nejprve přičteme k funkci $g(x,y)$ vhodnou funkci $c(x,y)$ tak, aby platilo $\Delta c(x,y)=0$ uvnitř obdélníka a navíc aby hodnota rozdílu $g(x,y)-c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová. Toho lze vždy dosáhnout: zvolíme-li funkci c tvaru

$$c(x,y)=c_0+c_1x+c_2y+c_3xy\,, \tag{9.2}$$

bude pro libovolnou volbu konstant c_0, c_1, c_2, c_3 platit $\Delta c(x,y)=0$ uvnitř obdélníka. Konstanty pak najdeme takové, aby hodnota rozdílu $g(x,y)-c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová (rozmyslete si, že to vždy lze[1].
Nyní budeme funkci $u(x,t)$ hledat ve tvaru

$$u(x,t)=v(x,t)+c(x,t)\,.$$

Díky vlastnostem funkce c máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,,$$

a úlohu pro u tedy vyřešíme, pokud najdeme funkci $v(x,y)$ takovou, že

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 & \text{pro } [x,y]\in(0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0)=-c(x,0)+g_1(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & v(x,b)=-c(x,b)+g_2(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & v(0,y)=-c(0,y)+g_3(x)\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ & v(a,y)=-c(a,y)+g_4(x)\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{9.3}$$

Zbývá tedy nalézt řešení problému pro funkci $v(x,y)$. To je ale jednoduché. Využijeme toho, že okrajová podmínka pro funkci v má díky naší konstrukci nulové hodnoty ve všech rozích obdélníka, a napíšeme $v(x,y)$ jako součet čtyř funkcí

$$v(x,y)=v_1(x,y)+v_2(x,y)+v_3(x,y)+v_4(x,y),$$

[1] Ukažte: označíme-li $h_1:=g(0,0)$, $h_2:=g(a,0)$, $h_3:=g(0,b)$, $h_4:=g(a,b)$ hodnoty okrajové podmínky g v rozích obdélníka $(0,a)\times(0,b)$, pak hledanou funkcí c je funkce tvaru (9.2), kde $c_0:=h_1$, $c_1:=\frac{1}{a}(h_2-h_1)$, $c_2:=\frac{1}{b}(h_3-h_1)$, $c_3:=\frac{1}{ab}(h_4-h_3-h_2+h_1)$.

kde každá z funkcí $v_i(x,y)$ řeší problém typu „Dirichletova okrajová podmínka na jedné straně obdélníka“ (viz minulé cvičení). Například problém pro $v_1(x,y)$ je

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=0 & \text{pro } [x,y]\in(0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0)=-c(x,0)+g_1(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & v(x,b)=0\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & v(0,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ & v(a,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \end{array}$$

pro $v_2(x,y)$ by okrajové podmínky byly

$$\begin{array}{ll} v(x,0)=0\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ v(x,b)=-c(x,b)+g_2(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ v(0,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ v(a,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \end{array}$$

a obdobně pro zbývající dvě funkce. Z linearity rovnice je zřejmé, že součet funkcí $v(x,y)=v_1(x,y)+v_2(x,y)+v_3(x,y)+v_4(x,y)$ je řešením úlohy pro $v(x,y)$.
Tím jsme si rozmysleli, že problém (9.1) umíme řešit.

• Dirichletova okrajová podmínka, nenulová pravá strana
Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici na obdélníku.
Návod:

1. Předně lze předpokládat, že Dirichletova podmínka je nulová: pokud by tomu tak nebylo, hledali bychom řešení jako součet dvou funkcí, kde jedna by splňovala rovnici s nenulovou pravou stranou a nulovou Dirichletovou podmínkou, a druhá by splňovalo řešení s nulovou pravou stranou a nenulovou okrajovou podmínkou (takovou úlohu již umíme řešit).
2. Zbývá tedy řešit úlohu typu

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f & \text{pro } [x,y]\in(0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0)=0\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(x,b)=0\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(0,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ & u(a,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{9.4}$$

   Přirozeně předpokládáme, že $a>0$, $b>0$, $f\in\mathcal{C}((0,a)\times(0,b))$.
3. Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze rozvést (alespoň pro skoro všechna $y\in(0,b)$) do sinové Fourierovy řady[2] vzhledem k proměnné x

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \text{kde } f_n(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\,.$$

   Řešení $u(x,y)$ budeme hledat ve tvaru

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,.$$

   Právě zavedená funkce zřejmě splňuje okrajové podmínky $u(0,y)=0$ a $u(a,y)=0$. Dosadíme-li takto definovanou funkci $u(x,t)$ do rovnice, dostaneme (derivujeme nejprve formálně člen po členu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2c_n(y)}{dy}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

   odkud plyne požadavek

$$\frac{d^2c_n(y)}{dy}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y)=f_n(y)\,. \tag{9.5}$$

   Okrajové podmínky k této obyčejné diferenciální rovnici získáme z okrajových podmínek původního problému $u(x,0)=0$ a $u(x,b)=0$, požadujeme proto $c_n(0)=0$ a $c_n(b)=0$.

[2] Viz „Diskusi formálního výsledku“ v minulém cvičení.

4. Dořešíme celou úlohu: obyčejnou diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant, řešení homogenní rovnice je
$$c_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$
variací konstant získáme rovnice
$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dy}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy}\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) &= 0\,, \\ \frac{n\pi}{a}\left(\frac{da_n}{dy}\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right) &= f_n(y)\,, \end{aligned}$$
odkud
$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dy} = \frac{a}{n\pi}f_n(y)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad &\Longrightarrow \quad a_n(y) = \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(s)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}s\right)ds\,, \\ \frac{db_n}{dy} = -\frac{a}{n\pi}f_n(y)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad &\Longrightarrow \quad b_n(y) = -\frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(s)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}s\right)ds\,. \end{aligned}$$
Právě získané vyjádření "konstant" a_n a b_n dosadíme do tvaru homogenního řešení $c_n(y)$ a dostaneme (použili jsme součtový vzorec pro hyperbolické funkce) obecné řešení rovnice (9.5)
$$c_n(y) = \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(s)\sinh\left((y-s)\frac{n\pi}{a}\right)ds,.$$
Použitím okrajových podmínek $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$ určíme konstanty α_n a β_n
$$\begin{aligned} c_n(0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \beta_n = 0 \\ c_n(b) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_n = -\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\frac{a}{n\pi}\int_0^b f_n(s)\sinh\left((y-s)\frac{n\pi}{a}\right)ds\,, \end{aligned}$$
čímž jsme vyřešili obyčejnou diferenciální rovnici pro $c_n(y)$. Získané $c_n(y)$ dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ a dostaneme řešení původního problému (9.4)
$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(&-\frac{a}{n\pi}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^b f_n(s)\sinh\left((y-s)\frac{n\pi}{a}\right)ds + \\ &+\frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(s)\sinh\left((y-s)\frac{n\pi}{a}\right)ds\Bigg)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,, \end{aligned} \tag{9.6}$$
kde
$$f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx\,.$$

• **Dirichletova okrajová úloha pro Laplaceovu rovnici na kruhu** Řešte rovnici $\Delta u = 0$ na kruhu o poloměru $R > 0$, s okrajovou podmínkou $u = g$ na hranici kruhu.

Návod:

1. Použijte Laplaceův operátor v polárních souřadnicích (r, φ),
$$\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0\,,$$
a hledejte řešení ve tvaru
$$u(r,\varphi) = A(r)B(\varphi)\,.$$
Berte do úvahy pouze ta řešení, která jsou na kruhu o poloměru R omezená (víte proč?). Pokud se vyskytnou při výpočtu nějaké Fourierovy řady v sinech a kosinech, pište je z důvodů, které vyplynou později, raději ve tvaru Fourierových řad v komplexních exponencielách. Předpokládejte, že funkci g lze také rozvinout do takové řady:
$$g(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{in\varphi}\,, \quad \text{kde } \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\,.$$

Měli byste dostat

$$u(r,\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,.$$

2. Dosaďte do tohoto vztahu za γ_n a pokuste se sečíst uvedenou řadu (nápověda: v komplexní exponenciele hledejte geometrickou řadu). Mělo by vám vyjít

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - t) + r^2}\,dt\,.$$

3. Řešení Laplaceovy rovnice na kruhu lze také vyjádřit Poissonovým integrálem. Porovnejte obě vyjádření. Je to totéž?

- **Cvičení pro vaše počítání**

(i) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1,\varphi) = \cos^2\varphi$.

(ii) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1,\varphi) = \sin^3\varphi$.

(iii) Řešte Laplace-Poissonovu rovnici $\Delta u = 2$ v obdélníku $(0,a)\times(b/2,b/2)$, je-li u na hranici

   (a) identicky nulové

   (b) rovno funkci $x - y + xy$.