Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 5}}$ **1.11.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

1. Dokončení tématu z předchozího cvičení:
   - Hadamardův protipříklad nekorektního zadání úlohy pro Laplaceův operátor (viz bod 6 z programu předchozího cvičení) - referát.
   - Lokální existence a jednoznačnost řešení Stokesova systému (viz bod 7 z programu předchozího cvičení) - referát.
   - Diskuse obecné rovnice 1. řádu ve dvou proměnných:
   $$F(x, y, u_x, u_y) = 0\,, \tag{5.1}$$
   (viz bod 4 (ii) z programu předchozího cvičení).
2. Zopakujte si, že klasické řešení Cauchyovy úlohy pro lineární konvektivní rovnici v jedné prostorové a jedné časové proměnné (pro $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) s počáteční podmínkou $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tj.
   $$\begin{aligned} u_t + a u_x = 0\,, \qquad & x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\,, \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad & x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$
   je dáno vztahem
   $$u(x,t) = \varphi(x - at)\,, \tag{5.3}$$
   a že toto řešení je možno nalézt[1] zavedením nových proměnných
   $$\xi = x - at\,, \qquad \eta = x + at\,. \tag{5.4}$$
3. Zkoumejte, zda substituce (5.4) vede k řešení následujících rovnic druhého řádu ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):
   (a) Lineární eliptická rovnice ve dvou proměnných (x, t):
   $$u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\,. \tag{5.5}$$
   Návod: Po provedení substituce dostaneme rovnici $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. Uvedená substituce vede tedy pouze k „odstranění koeficientu a^2 u u_{xx}“, tj. převádí (5.5) v Laplaceovu rovnici $\Delta u(\xi, \eta) = 0$. V příštím cvičení se k této rovnici znovu (o něco úspěšněji) vrátíme.

   (b) Lineární rovnice vedení tepla v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:
   $$u_t - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\,. \tag{5.6}$$
   Návod: Po provedení substituce obdržíme rovnici $a(u_\eta - u_\xi) + a^2(u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) = 0$, tedy se nám úspěšně povedlo problém učinit složitějším. Rovnici vedení tepla budeme vbrzku řešit jiným způsobem.

   (c) Lineární vlnová rovnice v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:
   $$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\,. \tag{5.7}$$

[1] … samozřejmě je možno řešení (5.2) nalézt také metodou charakteristik – srov. s cvičením z 11.10.2007 (cvičení číslo 2) – př. 3 a př. 2c).

Návod: Po provedení substituce (5.4) dostaneme rovnici $u_{\xi\eta} = 0$, jejímž dvojím přeintegrováním (podle ξ a podle η) dostaneme, že řešením (5.7) jsou všechny funkce tvaru $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kde f a g jsou libovolné dostatečně hladké funkce. Celkově tedy je $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ libovolným řešením (5.7).

(d) Předchozí úspěšný bod učiňte ještě úspěšnějším: najděte řešení problému

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

tj. dopracujte se až k tzv. d'Alembertovu vzorci

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, ds\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \tag{5.9}$$

Návod: Vyjděte z výsledku, který jste odvodili v předchozím bodu: $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$. S použitím obou okrajových podmínek z (5.8) se relativně snadno dopracujete k d'Alembertovu vzorci. Přímým dosazením se přesvědčte, že funkce (5.9) řeší problém (5.8). Odůvodněte pomocí věty Cauchy-Kowalevské, že úloha (5.8) má pro reálně analytické funkce φ, ψ jediné reálně analytické řešení. Protože funkce (5.9) je (pro reálně analytické φ, ψ) reálně analytická, našli jsme toto řešení explicitně.