Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 **č. 4** **25.10.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

Vyjdeme z následující věty.

Věta 4.1 (Cauchy-Kowalevská) *Buďte* $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I_\rho^{d+s} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,d$, $j = 1,\dots,s$, *reálně analytické pro nějaké* $\rho > 0$. *Pak existuje* $\rho' \in (0,\rho\rangle$ *a reálně analytické funkce* $u_r : I_{\rho'}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $r = 1,\dots,s$, *takové, že pro všechna* $r = 1,\dots,s$ *platí*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(x,t))\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x,t) + b_r(x,u(x,t)) \quad \text{na } I_{\rho'}^{d+1}\,, \tag{4.1}$$

$$u_r(x,0) = 0 \quad \text{na } I_{\rho'}^{d}\,. \tag{4.2}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí je toto řešení určeno jednoznačně.

Ukažte, že Větu 4.1 lze podstatně zobecnit:

1. V (4.1) lze připustit závislost koeficientů úlohy na proměnné t, tj. $a_{ijr} = a_{ijr}(x,t,u)$, $b_r = b_r(x,t,u)$.

   Návod: Uvažujte novou „neznámou“ funkci $u_{s+1} \equiv t$ a sestavte pro ni $(s+1)$. rovnici a počáteční podmínku. Ukažte, že pro novou vektorovou funkci $\widetilde{u} := (u_1,\dots,u_s,u_{s+1})$ dostaneme systém typu (4.1), (4.2), kde $a_{ijr} = a_{ijr}(x,\widetilde{u})$, $b_r = b_r(x,\widetilde{u})$.

2. Ve (4.2) lze připustit obecnou počáteční podmínku $u_r(x,0) = \varphi_r(x)$, kde $\varphi_r(x)$ je reálně analytická funkce.

   Návod: Uvažujte nové neznámé funkce $v_r(x,t) := u_r(x,t) - \varphi_r(x)$.

3. Diskutujte lokálnost existence řešení. Uvažte, že lokální řešení lze „slepovat“ nejen v prostoru, ale i v čase, tj. pokud řešení existuje například pro $|x - x^0| < \delta$ a pro $t = t_0 > 0$ (označme toto řešení U), lze uvažovat systém (4.1) v $I_\delta^{d+1}([x^0,t_0])$ s počáteční podmínkou $u_r(x,t_0) = U_r(x,t_0)$ v $I_\delta^d(x^0)$. Odůvodněte, že Větu 4.1 lze zobecnit takto: je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ oblast, „kde jsou všechny koeficienty úlohy (tj. a_{ijr}, b_r, příp. φ_r) reálně analytické“ (zformulujte přesně!), existuje $\Omega' \subset \Omega$, na které existuje (ve třídě reálně analytických funkcí jednoznačně určené) řešení (4.1), (4.2).

4. Konečně: v (4.1) lze připustit i systém zcela obecných parciálních diferenciálních rovnic vyššího řádu, za následujících omezujících předpokladů:

   (a) všechny rovnice v systému lze (alespoň lokálně) převést na rovnice vyřešené vzhledem k nejvyšší derivaci podle jedné z proměnných (ve všech rovnicích musí tato proměnná být tatáž); pak lze vhodnými substitucemi převést takový systém na systém tvaru (4.1);

   (b) koeficienty úlohy (po provedení výše naznačených substitucí) musí být reálně analytické, tj. původní systém musí být tvořen „reálně analytickými závislostmi“;

   (c) počáteční podmínky úlohy musí být takové, aby po převedení na systém tvaru v (4.1) byl k dispozici dostatečný počet reálně analytických podmínek tvaru (4.2); poznámka: někdy může dojít k situaci, kdy musíme proderivováním zvýšit řád rovnice, v takové situaci je nutno zvolit novou počáteční podmínku, která je automaticky splněna pro původní rovnice.

n Diskutujte celou situaci na příkladu dvou rovnic:

(i) Zcela obecná rovnice druhého řádu ve dvou proměnných, vyřešená vzhledem k u_{tt}:

$$u_{tt} = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}) \tag{4.3}$$

s podmínkami

$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \tag{4.4}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)\,. \tag{4.5}$$

Ukažte, že pokud jsou F, φ, ψ reálně analytické funkce svých proměnných, existuje (lokálně) jediné reálně analytické řešení problému (4.3)–(4.5).

Návod: Položte $t = u_1$, $u = u_2$, $u_x = u_3$, $u_t = u_4$, $u_{xt} = u_5$, $u_{xx} = u_6$.

(ii) Zcela obecná rovnice 1. řádu ve dvou proměnných:

$$F(x, y, u_x, u_y) = 0\,. \tag{4.6}$$

Návod: Nejprve proderivujte celou rovnici podle (například) y. Vypočtěte u_{yy} a postupujte dle předchozího příkladu. Diskutujte počáteční podmínky, zejména novou podmínku typu „$F(\dots)|_{y=0} = 0$“, která je splněna automaticky pro řešení původní rovnice. Proč vlastně je potřeba nová podmínka a proč je vhodné ji mít takového tvaru?

Na základě předchozích úvah ukažte:

5. Úloha pro Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = 0\,, \tag{4.7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \tag{4.8}$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x)\,, \tag{4.9}$$

má v okolí $\{y{=}0\}$ jediné reálně analytické řešení (jsou-li φ, ψ reálně analytické v okolí $\{y{=}0\}$).

6. Úloha (4.1)–(4.2) nemusí být vždy korektně zadána! Tj. řešení sice existuje a je jediné, ale nemusí záviset spojitě na datech úlohy.

Návod: V předchozí situaci úlohy (4.7)–(4.9) uvažujte tzv. Hadamardův příklad: $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{\sin nx}{n^k}$. Odůvodněte, že funkce $u(x, y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^{k+1}} \sin nx$ je jediné reálně analytické řešení úlohy (4.7)–(4.9). Přitom pro toto řešení platí výrok:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall y_1 > 0 \;\; \forall K > 0 \;\; \exists n, k \in \mathbb{N},$$

že

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon\,,$$

a přitom pro libovolné $a < b$ (v proměnné x)

$$\|u(\cdot, y_1)\|_{\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)} > K\,.$$

Tento příklad nám naznačuje, že úloha (4.7)–(4.9) asi nebude „ta správná okrajová úloha“ pro Laplaceův operátor.

7. Pro vhodnou sadu počátečních podmínek ukažte, že lokálně existuje jediné (reálně analytické) řešení tzv. Stokesova systému v $\mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$), pro funkce $\vec{u} = (u, v)$ (případně $\vec{u} = (u, v, w)$) a p (reprezentující po řadě rychlost a tlak),

$$\Delta\vec{u} - \nabla p = 0\,, \tag{4.10}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0\,. \tag{4.11}$$

Návod: Věřili byste, že například pro problém ve dvou dimenzích budete potřebovat 5 počátečních podmínek? A co víc, dokázali byste si tuto víru logicky odůvodnit?