Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 2}}$ **11.10.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

1. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$. Hledáme funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takovou, že je na hranici $\partial\Omega$ rovna předepsané (hladké) funkci φ a přitom plocha grafu (tj. dvourozměrná míra množiny $\{y = u(x)\,;\, x \in \Omega\,,\, u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$) je minimální. Odvoďte rovnici, kterou musí nutně hladké (tak hladké, jak je potřeba) u v oblasti Ω splňovat (tzv. rovnici minimální plochy):

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0\,. \tag{2.1}$$

   Návod: Vyjděte z toho, že velikost uvedené plochy dané grafem u je dána jako

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx$$

   a jde tedy o minimalizaci funkcionálu Φ na prostoru $\{u(x)$ „dostatečně hladká“ ; $u = \varphi$ na $\partial\Omega\}$. Nutnou podmínkou pro to je, aby

$$\frac{d}{ds}\Phi(u+sv)\bigg|_{s=0} = 0\,, \tag{2.2}$$

   kde $v(x)$ je libovolná hladká funkce na uzávěru Ω taková, že $v = 0$ na $\partial\Omega$.[1] Spočtěte tedy (2.2) (vyjde vám, doufám, $\int_\Omega \frac{\nabla u\cdot\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,dx = 0$), dále použijte jednu z Gauss-Green-Ostrogradského formulí a odvoďte odtud $\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) v\,dx = 0$. Konečně se zamyslete nad tím, že pokud toto má platit pro všechna v výše zmíněných vlastností, musí pro dostatečně hladká u platit (2.1) ve všech bodech. Proveďte všechny kroky podrobně!

2. Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

   (a) $u_x = 6x^2 u_y$.
   Řešení: $u(x,y) = F(2x^3+y)$, kde F je libovolná hladká funkce.

   (b) $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $(a \neq 0)$.[2]
   Řešení: $u(x,t) = \sin(x-at)$.

   (c) $u_t + xu_x + tu = 0$, $u(x,0) = \sin x$.
   Řešení: $u(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\sin(xe^{-t})$.

   (d) $(z+y-x)u_x + (z+x-y)u_y + zu_z = 0$.
   Řešení: $u(x,y,z) = \Phi(x+y-2z, z^2(x-y))$, kde Φ je libovolná hladká funkce dvou proměnných.

3. Odvoďte, že řešení Cauchyovy úlohy $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $(a \neq 0)$ je toto: $u(x,t) = \varphi(x-at)$ ještě jinak, než metodou charakteristik.
   Návod: Zaveďte nové proměnné $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

[1] Znalci variačního počtu jistě postřehli, že na levé straně výrazu (2.2) počítáme tzv. Gâteauxovu derivaci $\delta\Phi(u;v)$, tj „derivaci Φ v bodě u a směru v“. Fyzici zobrazení $\delta\Phi(u;\cdot)$ někdy říkají „variace Φ“. Jde o zobecnění klasického pojmu derivace ve směru.

[2] Napište řešení tak, jak napovídá metoda charakteristik. Možná je také v této chvíli vhodné zamyslet se nad úlohou 3.