PLOŠNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Čtyřpřednáškový rychlokurz

LS 2007/08

v rámci MAA004

M. Rokyta

XVI. PLOŠNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

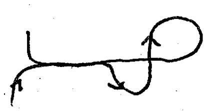
XVI.1 KŘIVKY A PLOCHY

Cílem je integrace přes „křivé a pokroucené definiční obory", které jsou „nižší dimenze" než „celý prostor".

Za tím účelem je nutné nejprve objekty „křivky a plochy" popsat. Standardní úzus je, že „křivka" je „něco jednodimenzionálního" a plocha „něco alespoň dimenze 2". Není však důvod nedívat se i na křivku jako na „1 dimenzionální plochu". Budeme kombinovat tento tradiční a obecnější pohled.

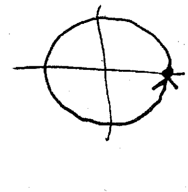
Def. Křivka v $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ (přesněji C^1-křivka v $\mathbb{R}^n$) je zobrazení $\gamma: \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1(\langle a,b\rangle)$.
Interval $\langle a,b\rangle$ nazveme referenční interval křivky γ

Pozn:
- derivace v a, b se chápou jednostranně
- někdy: $\langle\gamma\rangle := \gamma(\langle a,b\rangle)$ geom. obraz křivky
  γ .... parametrizace $\langle\gamma\rangle$
  často se zaměňuje $\langle\gamma\rangle$ s „křivkou". Ale zatím nevyžadujeme např. prostou γ, tj. křivka se může nejen křížit, ale i „zdvojit"



Př: 1) $\gamma: \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$x(t) = r\cos t$
$y(t) = r\sin t$

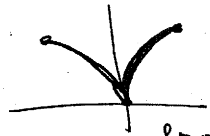


2) POZOR! Ani $\gamma \in C^1$ nevylučuje přítomnost „hrotů" v geom. obrazu

křivky: $\gamma : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$ $\quad x(t) = t^3$

$y(t) = t^2$ dokonce C^∞

přitom $y = t^2 = x^{\frac{2}{3}}$



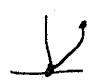
„hrot"

3) Různé křivky (ve smyslu „různá zobrazení $\gamma : \langle a,b\rangle \to \dots$)

mohou mít stejné geom. obrazy

$$\gamma_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$$

$\langle 0,1\rangle \qquad \langle 0,1\rangle$



$$\langle \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_2 \rangle$$

neboli jinak: stejný „geom. obraz" může mít více „parametrizací"

Pojďme na plochy.

Def. Buď $1 \leq k < n$, definujme k-rozměrnou C^1-plochu v $\mathbb{R}^n$ jako

zobrazení $\varphi : G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(G)$, G otevřená

G ... referenční obor křivky φ

Pozn: • podobně $(\varphi) = \varphi(G) = \Omega$ ... „plocha", přesněji její geom. obraz

$\langle \varphi \rangle = \varphi(\overline{G})$

• 1-rozměrná plocha ≡ zobecněná křivka

Pozorujte: $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka ve smyslu def. výše

$$\Downarrow$$

$\gamma^\circ := \gamma|_{(a,b)}$ je zobecněná křivka.

u zob. křivek navíc nemá již def obr smysl.

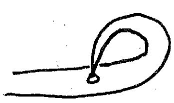
Def. C^1-plocha (resp. křivka) je <u>regulární</u> v t, pokud
$\varphi: G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

Jacobiho matice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$ má hodnost k.
(φ je regulární)

Plocha φ je <u>regulární</u>, pokud je regul. v každém bodě.

Pozn.: • Pro $k=1$ (regul. křivka) se to redukuje na $\|\varphi'(t)\| \neq 0$.

Def. C^1-plocha je jednoduchá, pokud je φ <u>prosté a regulární</u> na G.
$\varphi: G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

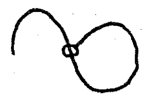
Pozn.: • Stále ještě může být  „skrz dotek sám sebe"
to je „nespojitá inverze"

• difeomorfismus: prosté & regul. & $\varphi^{-1}(G) \to G$ je spojité

Věta: $n=k \Rightarrow$ prosté a regulární je difeomorfismus

$n>k \Rightarrow$ nemusí to tak být, viz obrázek výše nebo:

Př. $\varphi: (0, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$

$x(t) = \sin t$
$y(t) = \sin 2t$ 

(ukázka)

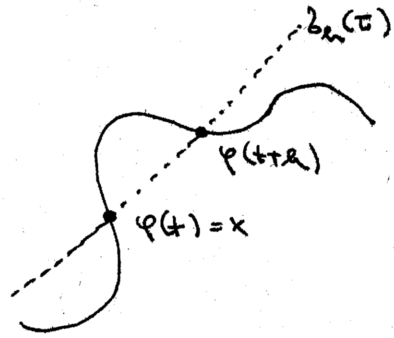
Pozn.: Ve větách budeme specifikovat jakou hladkost potřebujeme.

Def. (tečný prostor k ploše)

Nechť $\varphi: G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je regulární C^1 plocha v $\mathbb{R}^n$, G otevřená; označme $\Omega := \varphi(G)$ a mějme $x \in \Omega$, tj $\exists\, t \in G$, $\varphi(t) = x$. Tečným prostorem k Ω v bodě x nazveme k-rozměrný lineární prostor $T_x(\Omega)$, jehož bází jsou vektory

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t).$$

Pozn:
- regularita $\Rightarrow$ jsou LN (matice derivací $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}$ má hodnost k)
- porovnání na křivce (stačí říct, že už víme, že derivace $\approx$ tečna)



$$\gamma_h(\tau) = \varphi(t) + \vec{a}\,\tau$$

tak aby $\gamma_h(h) = \varphi(t+h)$

$$\gamma_h(h) = \varphi(t) + \vec{a}\,h$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

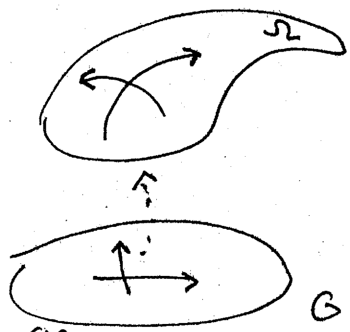
tj $\gamma_h(\tau) = \varphi(t) + \dfrac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}\,\tau$

$\downarrow h \to 0$

tečna $\gamma(\tau) = \varphi(t) + \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{tečný vektor}}\,\tau$

NEDĚLAL JSEM

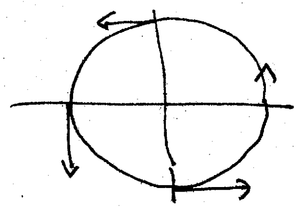
ve více dimenzích je představa obdobná, na ploše si představím křivky jako obraz souřadných os, a tak $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}$ jsou jejich tečné vektory



Př: křivka (t^2, t^3) nemá tečnu v počátku, i když je C^1

Př. $\gamma: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ křivka

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad \|\gamma'\| = 1$



respektuje směr probíhání

$\underline{\text{XVI}}$. 2 KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INT. 1. DRUHU

Def. Nechť $\gamma: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ je regul. zobecněná C^1 křivka a f fce def na $\langle\gamma\rangle$

Def křivk. int. 1. druhu

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\gamma f(x)\,ds(x) := \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

pokud int vpravo má smysl (např. jako Lebesgueův)

Pozn. Na pravé straně je „věta o substituci". Připomíná to jednorozměrnou větu o substituci, až na tu normu $\|\gamma'(t)\|$. Jak je to s „velikostí" $\gamma'(t)$ v obyčejné větě o substituci?

Připomenutí: $\underbrace{\omega: (a,b) \xrightarrow{\text{na}} (c,d),\ C^1,\ \omega' \neq 0}$

$(\Rightarrow)$ ω prosté ... z Rolleovy věty

$\Rightarrow$ ω difeomorfní (podle regulární mezi $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^1$)

$\Rightarrow$ inverze je C^1 kde $(\omega^{-1})' = \dfrac{1}{\omega'}$)

$\omega: t \in (a,b) \longmapsto x \in (c,d)$

$$\underbrace{\int_c^d f(x)\,dx = \int_{\dots}^{\dots} f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt}^{\text{JSTE ZVYKLÍ}}$$

„$x = \omega(t)$“

„$dx = \omega'(t)\,dt$“

ω roste: $\omega(a) = c$, $\omega(b) = d$, $\omega' = |\omega'|$ $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(\omega(t))\,|\omega'(t)|\,dt$

ω klesá: $\omega(a) = d$, $\omega(b) = c$, $\omega' = -|\omega'|$ $\longrightarrow$ $\displaystyle -\int_b^a f(\omega(t))\,|\omega'(t)|\,dt$

v obou případech $\displaystyle = \int_a^b f(\omega(t))\,\underbrace{|\omega'(t)|}\,dt$

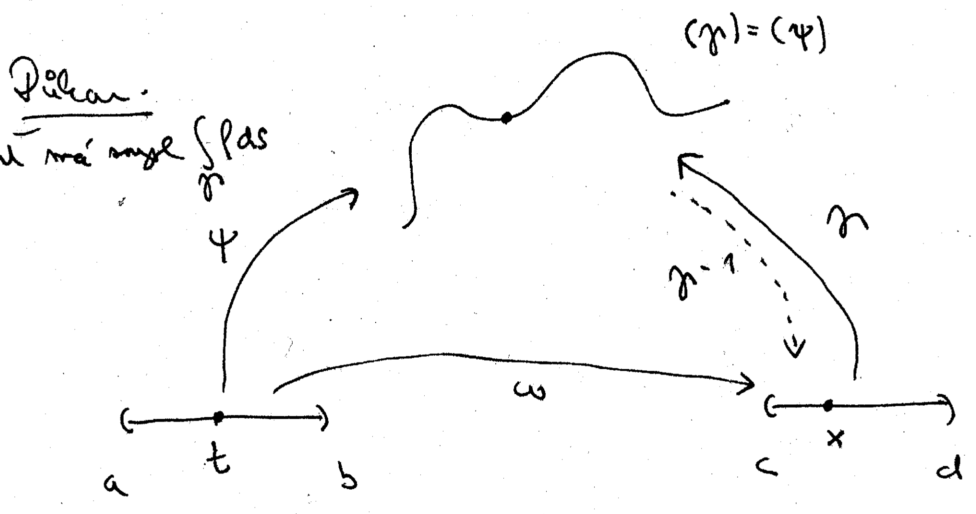
umožní zachovat uspořádání intervalu nezávisle na monotonii ω

<u>Věta 1</u> (o nezávislosti křivk. int. 1. druhu na parametrizaci)

Buďte γ, ψ dvě difeomorfní rovnocenné křivky, $\gamma: (c,d) \to \mathbb{R}^n$, $\psi: (a,b) \to \mathbb{R}^n$, takové, že $(\gamma) = (\psi)$, f na (γ).

Potom
$$\int_\gamma f\,ds = \int_\psi f\,ds$$
nebo ani jeden z int. nemá smysl.

<u>Pozn.:</u>
- důležité, jde o korektnost definice
- předpoklad difeomorfismu je obecně omezující, ale ne příliš. Kromě toho jde hlavně o to nahlédnout jak to funguje. Nezávislost na param. platí ale i jen pro regul. křivky, nebo i dokonce pro obecnější parametrizace



Důkaz.
Nechť má smysl $\int_\gamma f\,ds$

$$x \equiv \omega(t) := \gamma^{-1}(\psi(t)) \quad \in C^1, \text{ protože}$$

tj $\quad \gamma(\omega(t)) = \psi(t) \qquad \Big/ \ \frac{d}{dt}$

$$\gamma'(\underbrace{\omega(t)}_{x})\,\omega'(t) = \psi'(t)$$

$$\underbrace{\|\gamma'(\omega(t))\|}_{\neq 0}\cdot|\omega'(t)| = \underbrace{\|\psi'(t)\|}_{\neq 0} \qquad \Rightarrow \ |\omega'| \neq 0$$

$\omega' \neq 0$ protože regul.
$C^1: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$
$\Rightarrow$ difeom.

Nyní, ~~...~~ víme, že má smysl $\int_\gamma f\,ds$.

diferenciál s 1.1

$$\int_\gamma f\,ds = \int_c^d f(\gamma(x))\,\|\gamma'(x)\|\,dx \underset{\text{„}x=\omega(t)\text{"}}{=} \int_a^b f(\underbrace{\gamma(\omega(t))}_{\psi(t)})\,\underbrace{\|\gamma'(\omega(t))\|\cdot|\omega'(t)|}_{\|\psi'(t)\|}\,dt$$

$$= \int_\psi f\,ds \qquad \text{cbd}$$

Má-li smysl $\int_\psi f\,ds$, jen zaměním role γ a ψ v důkaze výše. $\boxtimes$

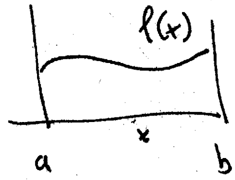
Def. Délka křivky: $\gamma: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ regul. C^1

$$\ell(\gamma) := \int_\gamma 1\,ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

(víme, že nezávisí na parametrizaci)

Pozn.: • $\gamma: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1(\langle a,b\rangle)$ $\Rightarrow$ má konečnou délku $\left(\|\gamma'(t)\| \le c\right)$
• $\exists$ křivky nekon. délky
• délka kružnice $(r\cos t, r\sin t) \xrightarrow{\gamma'} (-r\sin t, r\cos t)$; $\|\gamma'\| = r \Rightarrow 2\pi r$

• Srovnej



$\gamma : t \mapsto (t, f(t))$

$\gamma' : t \mapsto (1, f'(t))$

$\|\gamma'\| = \sqrt{1+(f')^2}$

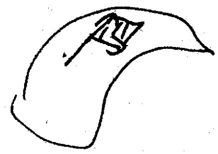
$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}\, dt$$

(*) • délka křivky jako supremum vepsaných lomených čar

K definici plošného int. 1. druhu potřebujeme něco jako $\|\varphi'(t)\| =$ „velikost lineárního elementu".

Budeme se zajímat pouze plochami <u>kodimenze 1</u>, tj. $k = n-1$

$\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ regulární, C^1. Tedy potom <u>máme</u>, jak



určit „velikost" lineárního elementu?

Odbočka do LA:

<u>Def</u>: (vektorový součin $(n-1)$ vektorů v $\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (aspoň 2 vektory); označme $e_j := (0, \dots \underset{j}{1}, \dots 0)$

$u_1, \dots u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, def.

$$u_1 \times \dots \times u_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \det(e_i, u_1, \dots u_{n-1})\, e_i$$

tj. j-tý člen $(u_1 \times \dots \times u_{n-1})_j = \begin{vmatrix} \dots & \underset{j}{1} & \dots \\ & u_1 & \\ & \vdots & \\ & u_{n-1} & \end{vmatrix}$

Př: $u \times v$ v $\mathbb{R}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & u & \\ & v & \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & u & \\ & v & \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & u & \\ & v & \end{vmatrix} e_3$

$= (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$

Lemma (o vlastnostech vekt. součinu)

Buďte $u_1,\dots,u_{n-1}\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$

Potom

1) $(u_1\times\dots\times u_{n-1})\cdot y = \det(y,u_1,\dots,u_{n-1})$

2) $u_1\times\dots\times u_{n-1}\neq 0 \iff u_1,\dots,u_{n-1}$ jsou LN

3) $u_1\times\dots\times u_{n-1}\perp u_j \quad \forall j=1,\dots,n-1$

(D)

nedělal jsem

1) rozvoj determinantu vpravo dle y dává přímo..

2) $\Leftarrow$ jsou-li LN, doplň vektorem y na bázi $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \det\neq 0$

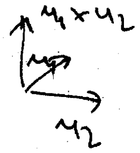
$\Rightarrow (\times\cdot\times)\neq 0$

$\Rightarrow$ nechť nejsou LN $\Rightarrow \det(e_j,u_1,\dots u_n)=0 \ \forall j$ cbd.

3) det vpravo v 1) je nulový pro $y=u_j\ \forall j$

Důsledek: $\left\{\begin{array}{l} u_1,\dots u_n \text{ LN} \\ \text{Obsah rovnoběžnostěnu o základně } u_1,\dots u_{n-1} \ \cancel{u_1\times\dots\times u_n} \end{array}\right.$

a výšce $u_1\times\dots\times u_{n-1}$



je $\|u_1\times\dots\times u_{n-1}\|^2$

(D) $|R| = |\det(\underbrace{u_1\times\dots\times u_{n-1}}_{w}, u_1,\dots u_{n-1})| \overset{1)}{=} |w\cdot(u_1\times\dots\times u_{n-1})| =$

$\|u_1\times\dots\times u_{n-1}\|^2$ cbd.

$\Rightarrow$ Tj. „podstava" má plochu $\|u_1\times\dots\times u_{n-1}\|$

Def. (plošný integrál 1. druhu na ploše kodimenze 1)

Nechť $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ je regulární C^1 plocha, G ot.

f def na $\langle\varphi\rangle$. Plošný integrál 1. druhu:

$$\int_\varphi f \, dS := \int_G f(\varphi(t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\| dt$$

má-li integrál vpravo smysl

Pozn: • $\int_\varphi 1 \, dS$ má význam obsahu plochy

• „metrický člen" $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\|$ lze počítat i jinak. Definuje se tzv. Grammova matice

$$\left(\varphi'(t)^T \cdot \varphi'(t) \right)_{ij} := \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t_j},$$

její determinant

$$\det \left(\varphi'(t)^T \cdot \varphi'(t) \right)$$

nazvem grammův determinant. Potom platí tzv. Cauchy-Binetova formule

$$\det \left(\varphi'(t)^T \cdot \varphi'(t) \right) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\|^2$$

tj metrický člen lze též spočítat jako odmocninu Grammova determinantu. Vidíme: φ regulární $\Rightarrow \det \left(\varphi'(t)^T \cdot \varphi'(t) \right) > 0$

(Oi) Povrch sféry

$x = r\cos\alpha\cos\beta \qquad \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = r\cos\alpha\sin\beta \qquad \beta \in (-\pi, \pi)$

$z = r\sin\alpha$

sféra (až na množinu $(n-1)$ dim. míry 0)

$\varphi : (\alpha, \beta) \longmapsto (x, y, z)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = (-r\sin\alpha\cos\beta, -r\sin\alpha\sin\beta, r\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = (-r\cos\alpha\sin\beta, r\cos\alpha\cos\beta, 0)$$

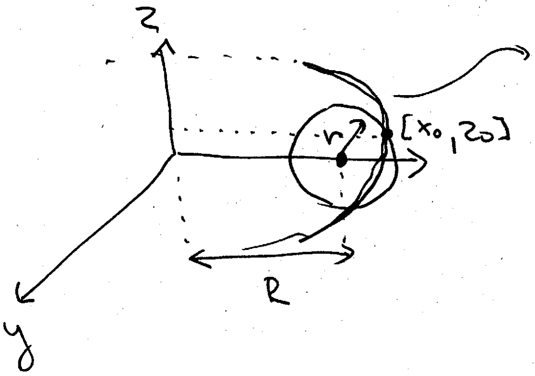
gramova matice vyjde $\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\alpha \end{pmatrix}$, její det $= r^4\cos^2\alpha$

tj $$\int_\varphi 1\,dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\cos\alpha \,d\beta\,d\alpha = r^2 \cdot 2\pi\,[\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi r^2.$$

VYNECHÁNO

(Oi) Povrch toru

Co je to torus a jak parametrizovat rotační plochu: $\boxed{r < R}$



obecně útvar $P = \{g(x_0, z_0) = 0\}$

zde $\underline{(x_0 - R)^2 + z_0^2 = r^2}$

Útvar P „rozrotuji" tak, že

$\left.\begin{aligned} z &= z_0 \\ x^2 + y^2 &= x_0^2 \end{aligned}\right\}$ dívat se co dělám

Z těchto tří rovnic „vyloučím" pevný bod $[x_0, z_0]$:

$$\underbrace{\big(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2} - R}_{=:A}\big)^2 + z^2 = r^2}$$ ROVNICE TORU $0 < r < R$

Jedna z mnoha parametrizací $A^2 + z^2 = r^2$

ansatz: $\left.\begin{aligned} A &= r\cos\alpha \\ z &= r\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Uparrow$

ale $\quad r\cos\alpha = A = \sqrt{x^2+y^2} - R \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = (R+r\cos\alpha)^2$

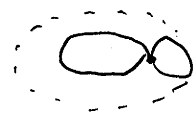
$\Downarrow$ ansatz 2:

$$\varphi: \left[\begin{array}{l} x = (R + r\cos\alpha)\cos\beta \\ y = (R + r\cos\alpha)\sin\beta \\ z = r\sin\alpha \end{array}\right.$$

z dřívějška

$\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$

Torus, až na dvě vyjímečné kružnice



mechanicky

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \quad \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \right\| = r(R + r\cos\alpha) \quad \text{zkuste}$$

$$\int_\varphi 1\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos\alpha)\,d\alpha\,d\beta = \underline{\underline{2\pi r \cdot 2\pi R}} \quad (=4\pi^2 r R)$$

interpretace: plocha = obvod řezu $\cdot$ dráha těžiště řezu

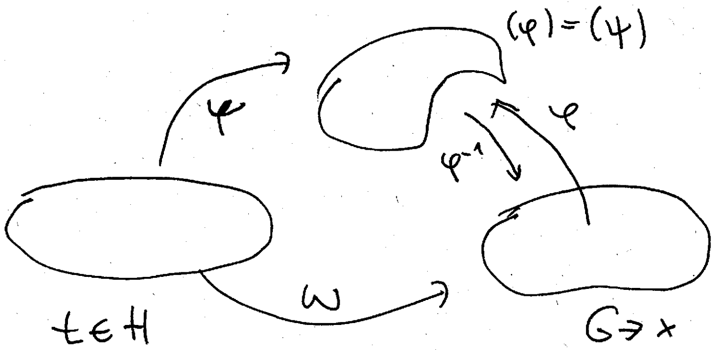
<u>Věta 2</u> (nezávislost plošného integrálu 1. druhu na parametrizaci)

Buďte φ, ψ difeomorfní zobecněné C^1 plochy kodimenze 1 v $\mathbb{R}^n$, $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, $\psi: H \to \mathbb{R}^n$, G, H otevřené, $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, f def na $\langle\varphi\rangle$. Potom

$$\int_\varphi f\,dS = \int_\psi f\,dS$$

nebo ani jeden z integrálů nemá smysl

① nechť má smysl $\int_\varphi f\,dS$ (SLÚNO $\varphi^{-1}\in C^1$ pro pohodlí)



$\omega(t) := \varphi^{-1}(\psi(t))$

C^1 regulární zobr.

$\varphi(\omega(t)) = \psi(t) \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t_i}$ p-komponenta

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_r \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_r}\frac{\partial \omega_r}{\partial t_i} = \frac{\partial \psi_p}{\partial t_i}}\qquad \forall p \qquad (+)$$

Pak

$$\int_\varphi f\,dS = \int_G f(\varphi(x))\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\times\dots\times\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right\|dx = \left[\begin{array}{l} x=\omega(t)\\ dx = J_\omega(t)\,dt \\ \text{kde } J_\omega(t) = \left|\det\frac{D\omega}{Dt}\right|\end{array}\right]$$

$$= \int_H f(\underbrace{\varphi(\omega(t))}_{\psi(t)})\underbrace{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\times\dots\times\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\omega(t))\right\|\cdot\left|\det\frac{D\omega}{Dt}\right|}_{\overset{?}{=}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t_1}\times\dots\times\frac{\partial\psi}{\partial t_{n-1}}\right\|}dt$$

Pokud ano, jsme hotovi

ale $(+)\Downarrow$

$$\sum_p\sum_{r,s}\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_r}\frac{\partial\omega_r}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_s}\frac{\partial\omega_s}{\partial t_j} = \sum_p\frac{\partial\psi_p}{\partial t_i}\frac{\partial\psi_p}{\partial t_j}$$

$$\sum_{r,s}\left(\varphi'(\omega(t))^T\cdot\varphi'(\omega(t))\right)_{rs}\left(\frac{D\omega}{Dt}\right)_{ri}\left(\frac{D\omega}{Dt}\right)_{sj} = \left(\psi'(t)^T\cdot\psi'(t)\right)_{ij}$$

$$\overset{\det}{\Longrightarrow}\quad\underbrace{\det\left(\varphi'(\omega(t))^T\cdot\varphi'(\omega(t))\right)}_{\overset{\|\ \text{Cauchy-Binet}}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\times\dots\times\right\|^2}}\cdot\left(\det\frac{D\omega}{Dt}\right)^2 = \underbrace{\det\left(\psi'(t)^T\cdot\psi'(t)\right)}_{\text{dtto}}$$

$\boxed{\text{čbd}}$

TECHNICKÉ: VYNECHÁNO S TÍM, ŽE TO PLYNE Z (+) A CAUCHY-BINET FORMULE

XVI.3 KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INT. 2. DRUHU

Def: Nechť $\gamma:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}^n$ je regul. rozšířená C^1 křivka a $\vec{f}:\langle\gamma\rangle\to\mathbb{R}^n$ (vektorová) funkce. Def. křivkový integrál 2. druhu

$$\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f}(t)\,d\vec{s}(t) := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$$

pokud má int vpravo smysl.

Pro (skalární) fci $u:\langle\gamma\rangle\to\mathbb{R}$ definujeme (přesněji označujeme)

$$\int_\gamma u\,dx_i := \int_a^b u(\gamma(t))\cdot\gamma_i'(t)\,dt$$

Pozn:
- V tomto značení $\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s} = \int_\gamma f_1dx_1+\dots+f_ndx_n$
- názvosloví: $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vektorové pole, $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ skalární pole } převzato z fyzik
- v definici hraje roli nejen velikost $\gamma'(t)$, ale i směr $\gamma'(t)$, tj. směr tečného vektoru.

Protože různé parametrizace mohou dát různé směry, musíme dbát u křivk. int. 2. druhu i na toto. Proto podrobněji:

Def. $\gamma: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ prostá (jednoduchá) reg. C^1 rob. křivka, označme pro $x = \gamma(t)$

$$\tau(x) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

a nazveme: jednotkové pole tečných vektorů na γ.

Někdy též píšu $\tau_\gamma(x)$, abych zdůraznil, z jaké parametrizace τ pochází.

Def. Buďte $\gamma: (c,d) \to \mathbb{R}^n$, $\psi: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ dvě prosté (jednod.) reg. C^1 rob. křivky, že $(\gamma) = (\psi)$. Pokud

$$\tau_\gamma(x) = \tau_\psi(x) \qquad \forall x \in (\gamma)$$

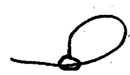
pak řekneme: γ a ψ jsou souhlasně orientované, pokud

$$\tau_\gamma(x) = -\tau_\psi(x) \qquad \forall x \in (\gamma)$$

jsou orientované nesouhlasně (opačně).

Pozn.: • Má-li ψ resp. γ prosté spojité rozšíření na $\langle a,b\rangle$ resp. $\langle c,d\rangle$

$\downarrow$

vyloučí to 

pak existují pouze tyto dvě možnosti.

Věta 3 (Vztah mezi křivk. int. 1. a 2. druhu)

$\gamma: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$ prostá reg. C^1 křivka, $\vec{f}: \langle\gamma\rangle \to \mathbb{R}^n$

$\tau(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ pro $x=\gamma(t)$. Potom

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f}\cdot\vec{\tau}\, ds$$

pokud aspoň 1 z nich má smysl.

D. $$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{\tau(\gamma(t))}\cdot\|\gamma'(t)\|\, dt$$ cbd.

Pozn: • Křivkový integrál 2. druhu lze představit „úhrn tečné složky (síly) $\vec{f}$ na $\langle\gamma\rangle$", tj. práci, kterou koná pole $\vec{f}$ při γ.

Důsl: • Nezávislost int. 2. druhu na parametrizaci: platí až na znaménko! při souhlasných parametrizacích totéž, jinak opačné.

Pozn: • Představě práce odpovídá také situace, ve které pro nějaká speciální f (hladká, mající kon. potenciál), kde K.I. 2. druhu spočíst velmi lehce:

__Def.__ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $\vec{f} \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ je potenciálem $\vec{f}$, pokud $\vec{f} = \nabla U$ na Ω, tj.

$$f_j(x) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

(něco jako prim. fce pro $\forall$ složky f)

Věta 4 (o výpočtu k.-i. 2. druhu pomocí potenciálu)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot.; $\vec{f} \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ s potenciálem $U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Potom pro každou $\varphi: \langle a, b \rangle \to \Omega$, reg. $\mathcal{C}^1$ křivku platí

$$\int_\varphi \vec{f}\, d\vec{s} = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a))$$

(D)

$$\frac{d}{dt} U(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_j}(\varphi(t))}_{f_j(\varphi(t))} \cdot \varphi_j'(t) = \vec{f}(\varphi(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) \Big/ \int_a^b dt$$

$\boxed{\text{cbd}}$

Def. (Plošný integrál 2. druhu na ploše kodimenze 1)

Nechť $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená, regulární C^1 plocha, nechť f je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} \vec{f} \cdot d\vec{S} := \int_G f(\varphi(t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right) \underbrace{dt_1 \dots dt_{n-1}}_{dt} \qquad (1)$$

má-li integrál vpravo smysl.

Def. (Jednotkové pole normálových vektorů na φ)

Buď φ jako v předch. definici, navíc <u>prostá</u> (= jednoduchá)

Označme pro $x = \varphi(t)$

$$\nu(x) := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}} \right\|} \qquad (2)$$

a nazveme: jednotkové pole normálových vektorů na φ.

Píšeme též $\nu_\varphi(x)$, chceme-li zdůraznit zobrazení φ, které $\nu(x)$ vygenerovalo.

<u>Pozn:</u> Díky regularitě $\nu(x)$ existuje ve všech bodech x.

Píšeme $\nu(x)$, ale je to vektor, tedy správně by se mělo psát $\vec{\nu}(x)$.

Věta 5 (vztah mezi plošným integrálem 1. a 2. druhu)

$\varphi: G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, G otevřená, buď prostá regulární C^1 plocha,

$\vec{f}: (\varphi) \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole na (φ) a nechť $\nu \equiv \vec{\nu}$ je

definováno (2). Potom

$$\int_\varphi \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\varphi \vec{f}\vec{\nu}\, dS \qquad (3)$$

pokud alespoň jeden z těchto integrálů má smysl.

Důkaz

$$\int_\varphi \vec{f}\, d\vec{S} = \int_G \vec{f}(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\vec{\nu}(t) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}} \right\|}_{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \dots \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right) \text{ dle } (2)} dt = \int_\varphi \vec{f}\vec{\nu}\, dS \quad \text{cbd.}$$

Pozn: • Odtud a z věty o nezávislosti plošného int. 1. druhu na parametrizaci, vidíme, že pro plošný int. 2. druhu platí

$$\int_\varphi \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\psi \vec{f}\, d\vec{S} \quad \text{resp.} \quad \int_\varphi \vec{f}\, d\vec{S} = -\int_\psi \vec{f}\, d\vec{S}$$

pokud $(\varphi) = (\psi)$ a $\nu_\varphi(t) = \nu_\psi(t)$ resp. $\nu_\varphi(t) = -\nu_\psi(t)$ $\forall x \in (\varphi)$.

prosté, regulární C^1 plochy s týmž geom. obrazem.

(jinak: dvě různé parametrizace téže plochy)

• Ze vztahu (3) je vidět, že $\int_{\varphi} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{\varphi} \vec{f}\vec{\nu}\, dS$

představuje „úhrn normálové složky $\vec{f}$ přes φ" a jako takové

hraje roli <u>toku</u> veličiny $\vec{f}$ přes φ.

Je zde zásadní rozdíl mezi křivkovým a plošným int. 2. druhu

$d\vec{s} \approx$ tečná složka $\vec{f}$ $\qquad$ $d\vec{S} \approx$ normálová složka $\vec{f}$

Proto značení $\int_{\gamma} \vec{f}\, d\vec{s}$ po křivce, $\int_{\varphi} \vec{f}\, d\vec{S}$ po ploše není úplně náležité

značení, ale hraje také roli významovou: určuje, kdy jde o tečnou a kdy o normálovou projekci $\vec{f}$. Budeme diskutovat situaci v $\mathbb{R}^2$, kde na křivku je možno nahlížet jako na plochu kodimenze 1.

XVI. 4 INTEGRÁLNÍ VĚTY

Zejména Gaussova (Gauss–Ostrogradského), Greenova, Stokesova....

Budeme se zabývat situací, kdy je množina dimenze n v $\mathbb{R}^n$ „ohraničena" plochou dimenze $(n-1)$.

Tyto pojmy nyní přesněji definujeme.

Def. (Ohraničení otevřené množiny)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n>1)$ je otevřená, omezená, a nechť $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená, je prostá regulární C^1 plocha.

Řekneme, že φ ohraničuje Ω v bodě $x=\varphi(t)\in\partial\Omega$, pokud existují $U(x)$ a tzv. rozhraničující funkce

$$h=h(y),\quad h: U(x)\to\mathbb{R},\quad h\in C^1(U(x))$$

že:

(i) $\nabla h(x)\neq 0$ a navíc $\nabla h(x)$ je kladným násobkem $\nu_\varphi(x)$

(ii) $y\in\Omega\cap U(x) \iff h(t)<0$

(iii) $y\in\varphi(G)\cap U(x) \iff h(t)=0$

Pozn.: • $h(t)<0$ charakterizuje „vnitřek Ω", proto $\nabla h(x)$ má směr „ven z Ω". Bod (i) tedy říká, že $\nu_\varphi(t)$ je tzv. vnější normála ke Ω v $x\in\partial\Omega$ (směřuje „ven z Ω").

Pojem „ohraničuje v bodě" v sobě tedy nese fakt, že na hranici Ω uvažujeme vnější normálu.

Při praktických výpočtech je nutno dbát na správnou orientaci normály. Uvědomte si, že $\nu_\varphi(t)$ je definována jako vektorový součin, a tedy lze znaménko ν_φ změnit záměnou pořadí proměnných $t_1,\dots,t_{n-1}$.

<u>Def.</u> (nulové množiny). Řekneme, že $N \subset \mathbb{R}^n$ je k-nulová množina ($1 \leq k \leq n$), pokud

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ koule $B_{r_j}(x_j)$, že $N \subset \bigcup_j B_{r_j}(x_j)$ a $\sum_j r_j^k < \varepsilon$

<u>Příklad</u> (jde o <u>ilustrace</u> pojmu, nikoli o důkazy nulovosti daných množin)

- úsečka $\langle 0,1 \rangle$: počet koulí o poloměru $\frac{1}{n}$ je úměrný n

  tj. $\sum_j r_j^1 \approx n \cdot \frac{1}{n} = 1$ ..... není 1-nulová

  $\sum_j r_j^2 \approx n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ ... je 2-nulová

- čtverec: $\sum_j r_j^k \approx n^2 \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-2}}$ → k-nulová pro $k \geq 3$

<u>Věta 6</u> (o divergenci, též Gaussova, Gauss–Ostrogradského, Gauss–Greenova)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená v $\mathbb{R}^n$, $\varphi: G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ regulární prostá C^1 plocha, <u>ohraničující</u> Ω (viz výše) tak, že $\partial\Omega = \varphi(G) \cup N$, kde N je $(n-1)$-nulová. Nechť $\vec{f}: \Omega \cup \varphi(G) \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole. Potom

$$\int_\varphi \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx \qquad (4)$$

pokud integrály na obou stranách konvergují.

Pozn. • $\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$

• jiná formulace (4): $\int_{\varphi} \sum_{i=1}^{n} f_i \nu_i \, dS = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dS$ (4')

• Ekvivalentní formulace (4):

$$\boxed{\int_{\varphi} F \nu_i \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i} \, dx \qquad \forall i = 1, \dots, n \quad F \in C^1(\Omega \cup \varphi(G))} \qquad (4'')$$

D: (4') ⇒ (4'') volbou $\vec{f} = (0, \dots, F, 0 \dots)$

(4'') ⇒ (4') dosazením f_i na F a $\sum_{i=1}^{n}$

Vzorec (4'') je de facto přímé zobecnění Newton-Leibnizovy formule

$$\underbrace{F(b) - F(a)}_{} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x) \, dx$$ do více dim.

Zde: hodnoty F na „hranici" $\langle a, b \rangle$ jsou brány se znaménkem, které „reflektuje směr vnější normály k $\langle a, b \rangle$ v bodech a, b"

Věta o divergenci má řadu důsledků, které nyní uvedeme postupně v pořadí, v jakém plyne jednoduše jeden z dalšího.

Za základní přitom zvolíme (4'').

Předpoklady na Ω, φ, G, N budou stejné jako ve Větě 6.

Pro jednoduchost označme $\tilde{\Omega} := \Omega \cup \varphi(G)$.

Důsledky vět o divergenci

- **Per partes** (po složkách): $u, v \in C^1(\tilde{\Omega})$

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\varphi u v \nu_i \, dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (5)$$

Důkaz: Položte $F = u \cdot v$ ve $(4'')$

- **Per partes** (vektorově totéž), $u, v \in C^1(\tilde{\Omega})$

$$\int_\Omega u \nabla v = \int_\varphi u v \vec{\nu}\, dS - \int_\Omega v \nabla u \qquad (6)$$

- **1. Greenova formule**, $u \in C^2(\tilde{\Omega})$, $v \in C^1(\tilde{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\varphi v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS - \int_\Omega v \Delta u \qquad (7)$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \vec{\nu}$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Důkaz: uvažte $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ místo u ve vzorci (5)

2. Greenova formule $\quad u, v \in C^2(\tilde{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u)\, dx = \int_{\varphi} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS \qquad (8)$$

Důkaz: Napište (7'), které vznikne ze (7) prohozením rolí u a v. Pak odečtěte (7) od (7').

Další důsledky

- $u \in C^2(\tilde{\Omega})$:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \qquad (9)$$

Důkaz: Položte $v \equiv 1$ v (8)

- $$\int_{\varphi} \vec{\nu}\, dS = \int_{\varphi} d\vec{S} = 0 \qquad \text{(vektorová „nula")} \qquad (10)$$

Důkaz: Položte $u = v \equiv 1$ v (6).

Vše tedy visí na důkazu jediného vzorce, a sice (4''). Dokážeme jej jsme na jistých zjednodušujících předpokladů, tj. nikoli proto, abychom viděli kam až lze zajít při zobecňování, ale spíše abychom viděli „jak to funguje".

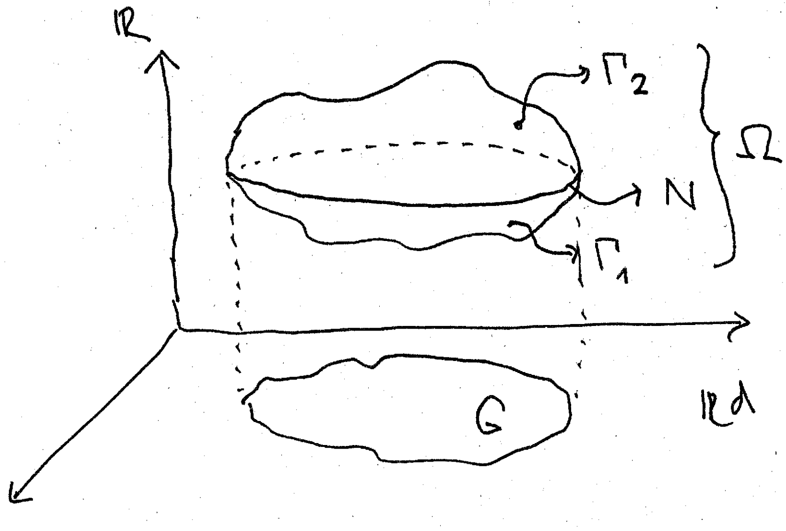
„Důkaz" věty o divergenci ↗ DĚLÁN ZA 11 minut, dosti nepořádně

Zjednodušení • ukážeme (4'') např. pro $i=n$, tj. ukážeme

$$\int_{\varphi} F\nu_n \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_n} \, dx \qquad (11)$$

$F \in C^1(\Omega \cup \varphi(G))$

• uvažujme Ω takovou, že $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup N$, N je $(n-1)$ nulová a Γ_k jsou popsatelné grafem C^1 funkce s nenulovým gradientem (to je ono zjednodušení). Tedy:



$$\Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n = g_k(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{\bar{x}}),\ [\bar{x}, x_n] \in G\}$$

$k = 1, 2$

kde $g_k \in C^1(G)$, G otevřená, $\nabla g_k \neq 0$ na G

Uvažme Γ_1: lze popsat parametrizací (x_j hrají roli parametrů t_j)

$$\Gamma_1 \approx \varphi_1 \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_n = g(\bar{x}) \end{cases}$$

Při této volbě je navíc

$$h_1(x) := g_1(\bar{x}) - x_n \quad \text{rozhraničující fce pro } \Gamma_1$$

$$(h_1(\bar{x}) < 0 \iff x_n > g_1(\bar{x}))$$

$$\nabla h_1 = (\nabla g_1, -1),$$ vektor ν na Γ_1 je jeho kl. násobek, tj $\nu_n / \Gamma_1 = \dfrac{-1}{\|\nu\|}$.

Odtud

$$\int_{\varphi_1} F\nu_n = \int_G F(x_1, \dots, x_{n-1}, g_1(x_1, \dots, x_{n-1})) \frac{(-1)}{\cancel{\|\nu\|}} \cdot \cancel{\|\nu\|} \, d\bar{x}$$

Podobně

$$\int_{\varphi_2} F\nu_2 = \int_G F(x_1, \dots, g_2(\dots)) \frac{(+1)}{\cancel{\|\nu\|}} \cdot \cancel{\|\nu\|} \, d\bar{x}$$

Konečně:

$$\int_{\varphi} F\nu_n = \int_{\varphi_1} F\nu_n + \int_{\varphi_2} F\nu_n = \int_G F(\bar{x}, g_2(\bar{x})) - F(\bar{x}, g_1(\bar{x})) \, d\bar{x} \overset{\text{Newton-Leibniz v 1D}}{=}$$

$$= \int_G \int_{g_1(\bar{x})}^{g_2(\bar{x})} \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) \, dx_n \, d\bar{x} \underset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_n} \, dx \quad \text{cbd.}$$

$\boxed{\text{cbd}}$

Závěrečné poznámky – NEŘÍKAL JSEM

- Pro $n=2$ je možno (φ) chápat buď jako křivku $(\dim=1)$ nebo obec. plochu kodimenze 1. Odtud dvě možná nahlížení integrálu $\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s}$ versus $\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{S}$ – viz poznámka na str. XVI/20. Pro definici $\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{S}$ ale potřebuji obecnější pojem „vektorového součinu $(n-1)$ vektorů v $\mathbb{R}^n$" (pro definici $d\vec{S}$) na $n=2$: 1 vektor v $\mathbb{R}^2$.

Formálně (viz str. XVI/8)

$$\underbrace{[u]}_{\text{vekt součin 1 vektoru v } \mathbb{R}^2} = \sum_{i=1}^{2} \det(e_i, u)\, e_i$$

Je-li $u=(u_1,u_2)$, dostanu $[u] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} e_2 = (u_2, -u_1)$

Při pohledu:

$\tau = (\tau_1, \tau_2) \approx \gamma'(t)$ BÚNO $\|\tau\| = 1$

$[\gamma'(t)] = [\tau] = (\tau_2, -\tau_1) \approx \nu$

přitom $\det\begin{vmatrix} \tau \\ \nu \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \tau_1, & \tau_2 \\ \tau_2, & -\tau_1 \end{vmatrix} < 0$

LEVOTOČIVÉ

Pozn: vnější normála) tedy bych vektor $\underbrace{(-\tau_2, \tau_1)}_{-\nu_1 \quad -\nu_2}$

Proto (4'') $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s} = \int_\gamma f_1\tau_1 + f_2\tau_2 = -\int_\gamma f_1\nu_2 - f_2\nu_1 \overset{(4'')}{=} -\int_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \int_\Omega \overbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}^{\operatorname{rot} \vec{f}}\, dx$$

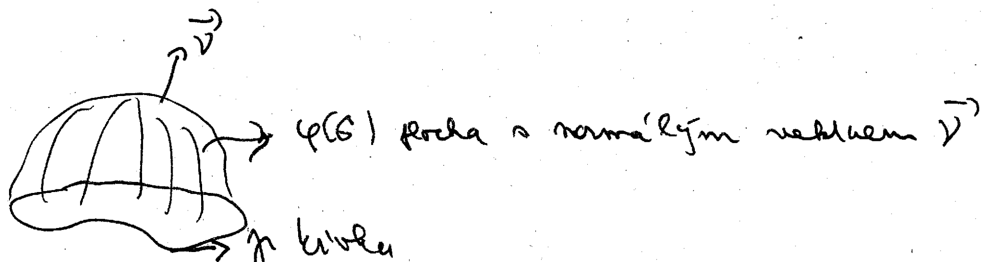
Ve dvou dimenzích tedy lze psát G-O větu jako tzv.

Greenovu větu:

$$\int_{\partial} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{f} \qquad (12)$$

kde $\operatorname{curl} \vec{f} = \operatorname{rot} \vec{f} \overset{\dim 2}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$.

• Vztah (12) lze dále zobecnit do tzv. 3rozměrné Stokesovy věty:



(13)

$$\Downarrow \qquad \int_{\partial} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\varphi} \operatorname{curl} \vec{f}$$

kde $\operatorname{curl} \vec{f} \overset{\mathbb{R}^3}{=} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$.

ŘÍKAL JSEM ↓

• Všechny vztahy (4) – (13) jsou speciálním případem tzv. obecné Stokesovy věty, o níž se lze dozvědět na přednášce

↓

viz: – integrace diferenciálních forem
– integrál na varietách ...

• Úvod do Analýzy na varietách (V. Souček)

nebo

• Integrál pro pokročilé (J. Malý)

≡ HOWGH ≡