# Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 30.3.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [9b] V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nalezněte řešení rovnice

$$-y''' + k^2 y' = \delta\,, \quad k > 0\,,$$

které splňuje $y(-x) = -y(x)$ pro $x \neq 0$.

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 6 na straně 89 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Příklad se již vyskytl v písemce, a to dne 15.1.2007. Řeší se standardní cestou:

- Vyřešení rovnice s pravou stranou rovnou nule, metodou charakteristického polynomu dá řešení tvaru $c_1 + c_2 e^{-kx} + c_3 e^{kx}$
- Abychom zůstali v prostoru $\mathcal{S}'$, musí být

$$y_+(x) = a + be^{-kx}\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = c + de^{kx}\,, \quad x < 0\,.$$

- Podmínky spojitosti nulté a první derivace v nule, a skoku velikosti $(-1)$ druhé derivace v nule dají tři podmínky, lichost funkce dává čtvrtou podmínku, jejichž řešením dostaneme:

$$a = d = \frac{1}{2k^2}\,, \qquad b = c = -\frac{1}{2k^2}\,.$$

- Celkově tedy

$$y_+(x) = \frac{1}{2k^2}(1 - e^{-kx})\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = -\frac{1}{2k^2}(1 - e^{kx})\,, \quad x < 0\,.$$

  což lze zapsat souhrnně jako

$$y(x) = \frac{1}{2k^2}\,\operatorname{sign} x(1 - e^{-k|x|})\,.$$

---

2. [10b]

(a) Najděte řešení rovnice vedení tepla na polopřímce

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad x > 0\,, \quad t > 0\,,$$

které splňuje $u(0,t) = 0$ pro $t > 0$, $u(x,0) = U_0 > 0$ pro $x > 0$.

(b) Odvoďte tvar Greenovy funkce pro rovnici vedení tepla.

(c) Zdůvodněte, jak jste zacházeli s počáteční podmínkou $u(x,0) = U_0 > 0$ pro $x < 0$ v bodu (a) výše, a proč.

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 8 na straně 261 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Příklad se již vyskytl v písemce, a to dne 12.1.2007. Při řešení je asi nejlepší zvolit pořadí bodů (b), (c), (a), tj. když už se to má i odvodit, tak si to nejprve odvodíme, a pak budeme aplikovat.

(b) Hledáme funkci $G = G(x,t)$ takovou, že $\frac{\partial G}{\partial t}, \Delta G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m \times (0,\infty))$, která je navíc pomalu rostoucí v nekonečnu, aby byla prvkem prostoru $\mathcal{S}'$. Tato funkce musí splňovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \Delta G &= 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, t > 0\,, && (1) \\ G(x,0) &= \delta\,, && (2) \end{aligned}$$

přičemž podmínka (2) se myslí tak, že $G(x,t) \to \delta$ ve smyslu distribucí, pro $t \to 0+$. Použijeme Fourierovu transformaci v proměnné $x$, a (1), (2) přejde v

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{G}}{\partial t}(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2 a^2 \widehat{G}(\xi,t) &= 0\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^m\,, t > 0\,, && (3) \\ \widehat{G}(\xi,0) &= 1\,. && (4) \end{aligned}$$

Pro pevné $\xi \in \mathbb{R}^m$ jde o obyčejnou diferenciální rovnici v proměnné $t$ s počáteční podmínkou pro $t = 0$, jejímž řešením je

$$\widehat{G}(\xi,t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 a^2 t}\,. \tag{5}$$

Využijeme sudosti funkce vpravo v (5), díky které je inverzní Fourierova transformace rovna dopředné Fourierově transformaci, kterou tedy aplikujeme na pravou stranu v (5). Výpočet nemusíme provádět, neboť víme (zpaměti nebo z taháku), že

$$\widehat{e^{-\alpha|\xi|^2}} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{\alpha}}\,. \tag{6}$$

Proto

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{m}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, t > 0 \tag{7}$$

je námi hledaná funkce.

(c) Víme, že řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou a s počáteční podmínkou $g$ je dáno vztahem

$$u(x,t) := G(x,t) \star_x g(x)\,,$$

což v jedné prostorové dimenzi dává

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy\,. \tag{8}$$

Je-li $g$ lichá funkce, dostáváme odtud speciálně pro hodnotu $u(0,t)$:

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-\frac{|y|^2}{4a^2 t}}\, dy = 0 \qquad \forall t > 0\,, \tag{9}$$

neboť integrujeme součin liché $g(y)$ a sudé ($e^{-\frac{|y|^2}{4a^2 t}}$) funkce přes celou reálnou osu. Odtud také naopak plyne, že pokud chceme vlastnost (9) vynutit, lze to učinit tím, že funkci $g$ učiníme lichou.

(a) V podstatě již jde jen o rozšíření funkce $g$ liše a aplikaci vzorce (8) s $a = 1$. Dostaneme

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} U_0 e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} U_0 e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy\,. \tag{10}$$

Protože (jak vidíte nebo jste schopni odůvodnit) nejsou integrály v (10) vyjádřitelné pomocí elementárních funkcí, je toto vlastně už výsledek. Nicméně trocha úprav do čitelnějšího tvaru není nikdy na škodu. Zde například pomohou substituce $\frac{x-y}{2\sqrt{t}} = s$, které umožní výsledek upravit na tvar

$$u(x,t) = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\, ds\,, \tag{11}$$

je tedy řešení rovno (až na násobek) tzv. „errorfunction“.

---

3. [11b] Uvažujte omezené řešení $u$ rovnice $\Delta u = 0$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, splňující podmínku $u = g$ na hranici $\Omega$, kde

$$\Omega := \{[x,y]\,;\ x > 0\,,\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 > a^2\,\}\,, \quad \text{pro } a > 0\,,$$

a funkce $g$ je definovaná takto:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{na } x^2 + y^2 = a^2\,,\ x > 0\,,\, y > 0\,, \\ 0 & \text{na zbytku hranice.} \end{cases}$$

Nalezněte hodnoty tohoto řešení na množině $\{[x,y] \in \Omega\,,\ x = y\}$.

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 22 na straně 155 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Je zlehčen tím, že řešení se nepočítá všude, ale jen na ose prvního kvadrantu. Příklad se již vyskytl v písemce, a to dne 12.2.2007.

Nejprve zobrazením $z^2$ zobrazíme zadanou oblast na horní polorovinu bez půlkruhu o poloměru $a^2$ a středu 0, což je jak dělané na Žukovského zobrazení $\frac{1}{2}(z + a^4/z)$. Celkové zobrazení je tedy[1]

$$f(z) = \frac{1}{2}\Big(z^2 + \frac{a^4}{z^2}\Big)\,.$$

Počáteční podmínka se přenese na charakteristickou funkci intervalu $(-a^2, a^2)$, a explicitní výpočet v horní polorovině dá řešení

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi + a^2}{\eta}\right) - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi - a^2}{\eta}\right)$$

(spočtěte si podrobně).

Vyjádření proměnných $\xi$ a $\eta$ pomocí $x$ a $y$ vychází ze vztahu

$$\frac{1}{2}\Big((x+iy)^2 + \frac{a^4}{(x+iy)^2}\Big) = f(x+iy) = \xi + i\eta\,,$$

což pro $x = y$ dává po úpravě

$$2ix^2 + \frac{a^4}{2ix^2} = 2(\xi + i\eta) \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0\,, \quad \eta = x^2 - \frac{a^4}{4x^2}\,,$$

a tedy

$$u(x,x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{a^2}{x^2 - \frac{a^4}{4x^2}}\right) - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{-a^2}{x^2 - \frac{a^4}{4x^2}}\right) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{4x^2a^2}{4x^4 - a^4}$$

na zadané množině.

---

[1] Ve skriptech se příklad řeší pomocí lineárního lomeného zobrazení - porovnejte.