Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 16.3.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [7b] Spočtěte distribuci

$$T = x^k \delta^{(n)} , \quad k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

kde $x \in \mathbb{R}$. (Pod termínem „spočtěte distribuci“ se rozumí „nalezněte její co nejjednodušší vyjádření“.)

Komentář k řešení: Jde o příklad 14 na straně 31 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“

Nejprve využijeme definice násobení distribuce hladkou funkcí, a pravidla o derivování distribuce:

$$x^k \delta^{(n)}(\varphi) = \delta^{(n)}(x^k \varphi) = (-1)^n \delta\big((x^k \varphi)^{(n)}\big) . \tag{1}$$

Výraz uvnitř zderivujeme pomocí Leibnizovy formule:

$$(x^k \varphi)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(x^k\right)^{(j)} \varphi^{(n-j)}(x) . \tag{2}$$

V této chvíli se vyplatí se na výraz (2) chvíli dívat: protože je tento výraz „uvnitř Diracovy distribuce“, bude nulový vždy, když v něm bude obsažena kladná mocnina x, tj. tehdy, když počet j derivování x^k bude menší než k. To ovšem nastane v případě $n < k$ vždy (neboť $j \leq n < k$), a proto je

$$x^k \delta^{(n)} = 0 \qquad \text{pro } n < k . \tag{3}$$

Šance na nenulové členy je tedy jen pro $n \geq k$. Výrazy za sumou v (2) však budou nulové nejen pro $j < k$, ale i pro $j > k$, protože pak se x^k „zderivuje až do nuly“. Jediný nenulový člen v součtu vpravo ve (2) tedy dostaneme pro $j = k$, a to

$$\binom{n}{k} \left(x^k\right)^{(k)} \varphi^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, k!\, \varphi^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\, \varphi^{(n-k)}(x) .$$

Pak podle (1), pro $n \geq k$:

$$x^k \delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \delta\big((x^k \varphi)^{(n)}\big) = (-1)^n \delta\Big(\frac{n!}{(n-k)!}\, \varphi^{(n-k)}(x)\Big) = (-1)^{2n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \delta^{(n-k)}\big(\varphi\big) . \tag{4}$$

Celkově tedy

$$x^k \delta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < k , \\ (-1)^{2n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \delta^{(n-k)} & \text{pro } n \geq k , \end{cases}$$

speciálně

$$x^n \delta^{(n)} = (-1)^n n!\, \delta , \tag{5}$$

což je možná docela zajímavé (že se derivace Diraca dají odstranit přenásobením).

---

2. [11b] V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ řešte rovnici

$$-\Delta u + 2a\nabla u + (b^2 - |a|^2)u = \delta\,, \quad a \in \mathbb{R}^3\,, \quad b \in \mathbb{R}, \quad b > |a|\,.$$

(Návod: zaveďte novou funkci předpisem $u(x) = v(x)\, e^{a\cdot x}$, nezapomeňte transformovat i derivace.)

Komentář k řešení: Jde o příklad 25 na straně 90 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“, navíc se velmi podobný příklad už počítal: příklad č.1 z písemky, která byla 12.1.2007. Prosím, počítejte si staré písemky, proto dávám jejich řešení na web.

Doporučená substituce $u(x) = v(x)\, e^{a\cdot x}$ je podstatná: zbaví nás (jak uvidíme) členu $a\nabla u$. Kdybychom substituci ignorovali a pokusili se rovnou fourierovsky transformovat, dostali bychom transformací tohoto členu výrazy $a_j \xi_j \widehat{u}$. Problém je, že taková transformovaná funkce není sféricky symetrická (musela by obsahovat pouze členy $|\xi|$), a tedy pro zpětnou Fourierovu transformaci bychom nemohli použít zjednodušující vzoreček, používající pouze jednorozměrný integrál. Museli bychom integrovat v $\mathbb{R}^3$. Netvrdím, že to nejde, jenom by to bylo mnohem pracnější.
Ti, kteří využili nápovědy, a nebáli se přepočítat

$$\begin{aligned} \Delta u &= (\Delta v + 2a\nabla v + |a|^2 v)\, e^{a\cdot x} \\ 2a\nabla u &= (2a\nabla v + 2|a|^2 v)\, e^{a\cdot x} \end{aligned}$$

zjistili, že původní rovnice přešla v

$$-\Delta v + b^2 v = e^{-a\cdot x}\delta = \delta\,. \tag{6}$$

Poslední rovnost není špatné odůvodnit: $e^{-a\cdot x}\delta(\varphi) = \delta(e^{-a\cdot x}\varphi(x)) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$.
V rovnici (6) už skutečně chybí člen s gradientem. Její Fourierova transformace dá

$$(4\pi^2|\xi|^2 + b^2)\,\widehat{v} = 1\,, \tag{7}$$

odkud

$$\widehat{v}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2 + b^2}\,. \tag{8}$$

Inverzní Fourierovu transformaci spočteme, jako mnohokrát předtím, s využitím tří úvah: sférická symetrie ukazuje, že $F^{-1} = F$, zároveň to ukazuje, že lze použít vzorec pro F.T. sféricky symetrické funkce v $\mathbb{R}^3$, a konečně se využije výpočet vzniklého integrálu pomocí residuové věty:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2}{|x|}\int_0^{\infty-0} \frac{r\sin 2\pi r|x|}{4\pi^2 r^2 + b^2}\,dr = \frac{1}{|x|}\mathrm{Im}\;\; 2\pi i\,\mathrm{Res}_{\frac{ib}{2\pi}} \frac{z e^{2\pi i z|x|}}{4\pi^2 z^2 + b^2} = \\ &= \frac{1}{|x|}\mathrm{Im}\;\; 2\pi i\; \frac{e^{2\pi i z|x|}}{8\pi^2}\bigg|_{z=\frac{ib}{2\pi}} = \frac{e^{-b|x|}}{4\pi|x|}\,. \end{aligned}$$

Úplně korektní postup by si ještě vyžádal zmínku o Jordanově lemmatu, díky kterému lze uvedený residuový výpočet provést, a také poznámku, že transformovaná funkce (8) není z $L^1(\mathbb{R}^3)$, ale je z $L^2(\mathbb{R}^3)$, proto se integrál počítá v zobecněném slova smyslu (jako $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$), ale že to se právě dělá při výpočtech pomocí residuové věty (symbolicky zde zachyceno pomocí „$\infty-0$“), a tak je vše v pořádku. Ti vnímavější také mohli konstatovat, že výsledná funkce $v(x)$ není spojitá, jak by být musela, kdyby byla funkce $\widehat{v}(\xi)$ z $L^1(\mathbb{R}^3)$.

Na závěr nesmíme zapomenout na zpětnou substituci:

$$u(x) = v(x)\, e^{a\cdot x} = \frac{e^{-b|x| + a\cdot x}}{4\pi|x|}\,.$$

3. [12b] Nechť $a > 0$ a definujme $\Omega := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y > 0\} \setminus \big(\{0\} \times \langle 0, a\rangle\big)$. Nechť funkce $g(x, 0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a nechť $g = 1$ na zbytku hranice Ω. Nechť konečně $u(x)$ je omezené řešení rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na hranici } \Omega \, .$$

Nalezněte hodnoty $u(0, y)$ pro $y > a$.

Komentář k řešení: Jde o příklad 15 na straně 154 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Příklad byl rovněž počítán na přednášce.

Zobrazení, která oblast převedla na horní polorovinu, byla po řadě tato: z^2 (rozevření úhlu 180° na úhel 360°, úsečka vedoucí z počátku do bodu ai se převede na úsečku vedoucí z počátku do bodu $-a^2$), $z + a^2$ (posunutí bodu $-a^2$ do počátku), $\sqrt{z}$ (zpětné sevření úhlu 360° na úhel 180°, úsečka vedoucí z počátku do bodu ai se nám transformovala na úsečku vedoucí z bodu $-a$ do bodu a). Celkové správně složené zobrazení je tedy

$$f(z) = \sqrt{z^2 + a^2} \, .$$

Okrajová podmínka se přenesla na charakteristickou funkci intervalu $\langle -a, a\rangle$, dalo se tedy řešení spočítat (opět postupem z přednášky) jako

$$v(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{ds}{(\xi - s)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi + a}{\eta} - \operatorname{arctg} \frac{\xi - a}{\eta} \right) . \tag{9}$$

Řešení nás zajímalo jen pro $x = 0$, $y > a$, tedy pro

$$f(0 + iy) = \sqrt{(0 + iy)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 - y^2} = i\sqrt{y^2 - a^2} = i\eta \, ,$$

a proto $\xi = 0$. Všimněte si, že nerovnost $y > a$ nám pomohla při rozhodnutí, jak odmocnit. Dosazením těchto dvou hodnot do (9) dostaneme

$$u(0, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}} \, , \qquad y > a \, . \tag{10}$$

Kdo navíc napsal, že řešení je určeno jednoznačně díky slůvku „omezené“ v zadání úlohy, mohl opět získat jeden bonusový bod navíc, což mi někteří z vás rovnou připomněli, abych snad nezapomněl. ☺