Početní část zkoušky $\boxed{12.2.2007}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Pro $k > 0$ nalezněte v prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ řešení rovnice

$$\Delta^2 u + k^4 u = \delta \,.$$

Dvojitý Laplaceův operátor je definován takto: $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$.

---

2. [10b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-k|x|}$, $k > 0$, kde $x \in \mathbb{R}^2$. Pozor, jsme v prostoru dimenze 2.

(Návod: Použijte vzorce pro transformaci takovýchto symetrických funkcí, a poté integrální vyjádření jedné speciální funkce, která se v něm vyskytuje.)

---

3. [12b] Uvažujte omezené řešení u rovnice $\Delta u = 0$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, splňující podmínku $u = g$ na hranici Ω, kde

$$\Omega := \{[x, y]\,;\; x > 0\,, y > 0\,, x^2 + y^2 > a^2\,\}\,, \quad \text{pro } a > 0\,,$$

a funkce g je definovaná takto:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{na } x^2 + y^2 = a^2\,,\; x > 0\,, y > 0\,, \\ 0 & \text{na zbytku hranice.} \end{cases}$$

Nalezněte hodnoty tohoto řešení na množině $\{[x, y] \in \Omega\,,\; x = y\}$.

Teoretická část zkoušky | 12.2.2007

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	Σ

---

1. **[8b]**

   (a) Definujte (stačí formálně, bez „zkorektnění“) konvoluci dvou distribucí $S \star T$, kde $S \in \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{S}'_K$. V jakém prostoru leží potom $S \star T$? (Nemusíte to dokazovat.)

   (b) Formulujte větu o Fourierově transformaci konvoluce distribucí pro výše zmíněnou dvojici distribucí.

   (c) Dokažte tuto větu.

---

2. **[12b]**

   (a) Definujte rovnici vedení tepla (tj. napište její tvar), zformulujte Cauchyovu úlohu pro tuto rovnici. Zformulujte bez důkazu Lemma o principu superpozice řešení.

   (b) Formulujte větu o o řešení u rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou a spojitou, omezenou a integrovatelnou počáteční podmínkou.

   (c) Dokažte tu část věty, která hovoří o nabývání počáteční podmínky, dále ukažte (=dokažte), čemu je roven integrál

   $$\int_{\mathbb{R}^m} u(x,t)\,dx \qquad \forall t > 0\,,$$

   kde u je řešení z předchozího bodu.
